Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 25. Mai 2010

a) Zeigen Sie, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig darstellen läßt in der Form $\frac{1}{2}m(m+1)+\ell$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le \ell \le m+1$ und folgern Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\varphi(k,\ell) = \frac{1}{2}(k+\ell-2)(k+\ell-1)+\ell$ bijektiv ist!

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung φ, daß für jede abzählbar unendliche Menge A und jede natürliche Zahl n auch $A\times A$ abzählbar unendlich ist!

c) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Nullmengen?

$$A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R}\times\mathbb{Q}, \qquad C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y\in\mathbb{Q}\right\},$$
$$D_\varepsilon = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy| < \varepsilon\right\} \quad \text{mit } \varepsilon > 0, \qquad E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \sin x\right\}$$

d) *Richtig oder falsch:* Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Nullmengen, so ist auch $A\times B \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ eine Nullmenge.

e) $f, g\colon D\to\mathbb{R}$ seien zwei stetige Abbildungen auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Falls $f(x) = g(x)$ für fast alle $x\in D$, ist $f = g$.

f) *Richtig oder falsch:* $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn $\mu^*(A) = 0$ ist.

g) Zeigen Sie, daß durch $f_k(x) = \max\left\{0, k-k^2\,|x|\right\}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ eine Funktion aus $K^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definiert wird!

h) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_k$ und $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k$!

i) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $K^0_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

j) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $K^0_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

k) Gibt es eine Funktion f, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert?

l) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall (punktweise) konvergiert?

m) Für $r > 0$ sei $g_r\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_r(x) = \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\frac{-r}{(x-a)(b-x)}} & \text{falls } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß g_r eine Funktion mit kompaktem Träger ist, und bestimmen Sie das Maximum von g_r!

n) Zeigen Sie, daß für die Folge der Funktionen $f_k = g_{1/k}$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in(a,\, b) \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_k(x)|\, dx = 0\,!$$

Hinweis: Betrachten Sie für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ die drei Intervalle $[a,\, a+\delta]$, $[a+\delta, b-\delta]$ und $[b-\delta, b]$ getrennt!