

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 18. Mai 2010

- a) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch die Funktion $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Lösung: *Richtig:* $h(x)$ verschwindet genau dann, wenn sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ verschwinden. Ist also $h(x) \neq 0$, so muß auch mindestens eine der beiden Funktionen f und g in x einen von Null verschiedenen Wert haben. Damit liegt x in mindestens einem der beiden Träger, also auch in deren Vereinigung. Diese ist als Vereinigung zweier kompakter Mengen selbst kompakt, also liegt $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}$ in einer kompakten Menge. Diese ist insbesondere abgeschlossen und enthält daher auch den Abschluß von W , den Träger von h . Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist dieser selbst kompakt.

- b) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt der Träger von h in der Vereinigung der Träger von f und von g .

Lösung: *Richtig;* das folgt aus der Argumentation bei der vorigen Aufgabe.

- c) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger von h die Vereinigung der Träger von f und von g .

Lösung: Die oben definierte Menge W ist die Vereinigung der Mengen $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ und $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$; die Träger von h, f, g sind die Abschlüsse dieser Mengen. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, daß der Abschluß von $W = U \cup V$ gleich der Vereinigung der Abschlüsse von U und V ist. Da diese Vereinigung abgeschlossen ist, enthält sie den Abschluß von W . Um die Gleichheit nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß sie jeder Randpunkt von U oder V im Abschluß von W liegt. Sei also x ein Randpunkt von U . Dann gibt es eine offene Umgebung O von x , die sowohl Punkte aus U als auch Punkte aus dem Komplement von U enthält. Falls letztere alle in V liegen, ist insbesondere $x \in V$, also erst recht $x \in W$. Andernfalls ist x ein Randpunkt von W , liegt also im Abschluß von W . Damit ist die Behauptung bewiesen.

- d) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion mit kompaktem Träger.

Lösung: Das ist natürlich im allgemeinen falsch, denn es gibt keinen Grund zur Annahme, daß g in den Punkten der Kreislinie $x^2 + y^2 = 9$ stetig ist. Einfachstes Gegenbeispiel wäre die konstante Funktion $f(x, y) \equiv 1$. Die Behauptung ist nur richtig, wenn $f(x, y) = 0$ ist für alle x, y mit $x^2 + y^2 = 3$.

- e) R sei das Rechteck mit Ecken $(\pm 1, \pm 5)$ und $f(x, y) = ((5 - |y|)\sqrt{1 - x^2})$. Was ist $\int_R f$?

Lösung:

$$\int_R f = \int_{-5}^5 \left(\int_{-1}^1 (5 - |y|)\sqrt{1 - x^2} dx \right) dy = \int_{-5}^5 \left((5 - |y|) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right) dy.$$

Für $\sqrt{1-x^2}$ kennen wir keine Stammfunktion; um eine zu bestimmen, bietet sich wegen der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ die Substitution $x = \sin t$ an. Da x von -1 nach 1 läuft, muß dabei t von $-\frac{\pi}{2}$ nach $\frac{\pi}{2}$ laufen. Dann ist

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t,$$

denn im betrachteten Intervall nimmt der Kosinus keine negativen Werte an. Weiter ist $dx = \cos t \, dt$, also

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt.$$

Auf letzteres Integral können wir die Regel zur partiellen Integration anwenden: In

$$\int u'v \, dt = uv - \int uv' \, dt$$

setzen wir $u = \sin t$ und $v = \cos t$; dann ist $u' = \cos t$ und $v' = -\sin t$, also

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t \, dt &= \sin t \cos t + \int \sin^2 t \, dt = \sin t \cos t + \int (1 - \cos^2 t) \, dt \\ &= \sin t \cos t + \int dt - \int \cos^2 t \, dt = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt, \end{aligned}$$

wobei die Integrationskonstante der Einfachheit halber weggelassen wurde. Bringen wir das Integral rechts auf die linke Seite, erhalten wir das Ergebnis

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + C$$

und damit

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$$

denn der Kosinus verschwindet an beiden Grenzen.

Mit diesem Ergebnis können wir die oben begonnene Rechnung fortführen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f &= \int_{-5}^5 \left((5-|y|) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \right) = \int_{-5}^5 \left((5-|y|) \frac{\pi}{2} \right) dy = \frac{\pi}{2} \int_{-5}^5 ((5-|y|) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-5}^0 (5+y) dy + \frac{\pi}{2} \int_0^5 (5-y) dy = \frac{\pi}{2} \left(\left(5y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-5}^0 + \left(5y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^5 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(25 - \frac{25}{2} + 25 - \frac{25}{2} \right) = \frac{25\pi}{2}. \end{aligned}$$

f) Interpretieren Sie dieses Integral als Volumen unterhalb einer Fläche über \mathbb{R} !

Lösung: Die Fläche ist natürlich der Graph von $f(x, y) = (5 - |y|)\sqrt{1-x^2}$. Ohne den Vorfaktor $(5 - |y|)$ hätten wir einen Halbkreis mit Radius eins; durch den Vorfaktor wird dieser in z -Richtung um den Faktor $(5 - |y|)$ gestreckt. Wir haben also eine Art Zelt, das aus einer halbkreisförmigen Röhre vom Radius eins entsteht, indem wir diese an den Rändern auf Höhe Null stauchen und dann die Höhe zur Mitte hin linear bis auf fünf wachsen lassen.

g) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für $f(x, y) = \max\{x + y, 0\}$!

Lösung: Nach Definition ist $\int_Q f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \max\{x+y, 0\} dx \right) dy$. Für festes y verschwindet dieses Maximum, wenn $x+y < 0$ oder $x < -y$ ist; für $x \leq -y$ ist es $x+y$. Da $-y$ für alle $y \in [-1, 1]$ im Integrationsintervall $[-1, 1]$ für die Integration über x liegt, können wir beim inneren Integral daher einfach statt bei -1 erst bei $-y$ beginnen und müssen dann nur über $x+y$ integrieren:

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-y}^1 (x+y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left. \frac{x^2}{2} + xy \right|_{-y}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} + y + \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \left. \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

h) Hat die Funktion f aus der vorigen Aufgabe kompakten Träger?

Lösung: Nein,, denn für beliebig große $x \in \mathbb{R}$ ist beispielsweise $f(x, x) \neq 0$.

i) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für $f(x, y) = |x - y|$!

Lösung: Nach Definition ist $\int_Q f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 |x - y| dx \right) dy$. Um im inneren Integral einen Integranden zu bekommen, dessen Stammfunktion wir kennen, müssen wir das Integrationsintervall aufteilen: Für $x \leq y$ ist $|x - y| = y - x$; für $x \geq y$ ist $|x - y| = x - y$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^y (y - x) dx + \int_y^1 (x - y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\left(xy - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^y + \left(\frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_y^1 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\left(y^2 - \frac{y^2}{2} \right) - \left(-y - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - y \right) - \left(\frac{y^2}{2} - y^2 \right) \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 (y^2 + 1) dy = \left. \frac{y^3}{3} + y \right|_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

j) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie $\int_Q f$ für das Quadrat Q mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$!

Lösung: Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \int_Q f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (1 - x^2 - y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_{-1}^1 dy = \int_{-1}^1 \left(\left(1 - \frac{1}{3} - y^2 \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} + y^2 \right) \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} - 2y^2 \right) dy = \left. \frac{4y}{3} - \frac{2y^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

k) Berechnen Sie auch $\int_Q g$ für $g(x, y) = \max\{0, f(x, y)\}$ und interpretieren Sie den Wert dieses Integrals geometrisch!

Lösung: Wenn wir y festhalten, ist $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ genau dann, wenn $x^2 \leq 1 - y^2$ ist, also $-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$. Genau für diese x ist $g(x, y) = f(x, y)$, ansonsten ist $g(x, y) = 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_Q g &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 g(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1 - x^2 - y^2) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(x - \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{1-y^2} - \frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2} - 2y^2\sqrt{1-y^2} \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3}\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{1-y^2} \right) dy = \frac{4}{3} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy - \frac{4}{3} \int_{-1}^1 y^2\sqrt{1-y^2} dy. \end{aligned}$$

Vom ersten der beiden Integrale ganz rechts wissen wir schon aus einer Aufgabe weiter oben, daß es den Wert $\pi/2$ hat. Für das zweite können wir, nachdem wir dort mit der Substitution $y = \sin t$ Erfolg hatten, wieder diesen Ansatz machen; wir erhalten

$$\int y^2 \sqrt{1-y^2} dy = \sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t \sin^2 t dt.$$

Auch hier könnten wir mit partieller Integration weitermachen, müßten die Regel allerdings wohl mehrfach anwenden. Einfacher wird es, wenn wir zunächst den Integranden mit Hilfe der EULERSchen Formeln vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sin^2 t \cos^2 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{it} + e^{-it} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i} \right)^2 = \frac{e^{4it} - 2 + e^{-4it}}{-16} = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y^2 \sqrt{1-y^2} dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

denn der Sinus verschwindet bei $\pm 2\pi$. Somit ist

$$\int_Q g = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Für die geometrische Interpretation des Ergebnisses beachten wir, daß der Abstand r eines Punktes (x, y) vom Nullpunkt gleich $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist; also ist $f(x, y) = 1 - r^2$, und für $r \leq 1$ ist das auch $g(x, y)$. Der Graph von g entsteht daher durch Rotation der Parabel $z = 1 - x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$ um die z -Achse; das Integral ist das Volumen des „Zuckerhuts“ unterhalb der rotierten Parabel.

l) Existiert $\int_{\mathbb{R}^n} g$? Falls ja, bestimmen Sie den Wert dieses Integrals; falls nein, begründen Sie warum!

Lösung: Da $f(x, y)$ nur im Innern der Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt positiv ist, hat g den Abschluß dieser Kreisscheibe als Träger, und da f auf dem Rand der Kreisscheibe verschwindet, ist mit f auch g stetig. Somit ist g eine Funktion mit kompaktem Träger, d.h. das Integral existiert und ist gleich dem Integral von g über irgendein Rechteck, das den Träger enthält. Ein solches Rechteck ist beispielsweise das obige Quadrat Q . Damit ist nach der vorigen Aufgabe klar, daß das Integral den Wert $\pi/2$ hat.

m) Stellen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_1^2 \frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2} dt$ als Integral dar!

Lösung: Da der Integrand $\frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2}$ für $t \neq 0$ eine stetig differenzierbare Funktion ist und unser Integrationsintervall $[1, 2]$ die Null nicht enthält, können wir die Integration über t mit der Differentiation nach x vertauschen. Die Ableitung des Integranden nach x ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(x+t)}{x^2+t^2} = \frac{-(x^2+t^2)\sin(x+t) - 2t\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2};$$

somit ist

$$f'(x) = \int_1^2 \left(\frac{-(x^2+t^2)\sin(x+t) - 2t\cos(x+t)}{(x^2+t^2)^2} \right) dt.$$

n) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei mindestens zweimal stetig differenzierbar, und R sei das achsenparallele Rechteck, das (a, b) und (c, d) mit $a < c$ und $b < d$ als zwei seiner Ecken hat. Was ist $\int_R g$ für $g(x, y) = xyf_{xy}(x, y)$?

Lösung: Nach Definition ist

$$\int_R g = \int_b^d \left(\int_a^c xyf_{xy}(x, y) dx \right) dy = \int_b^d y \left(\int_a^c xf_{xy}(x, y) dx \right) dy.$$

Zur Berechnung des inneren Integrals wenden wir die Regel zur partiellen Integration $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ an mit $u(x) = f_y(x, y)$ und $v(x) = x$. Da f mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, ist nach dem Lemma von SCHWARZ $u'(x) = f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$, also

$$\int xf_{xy}(x, y) dx = xf_y(x, y) - \int f_{xy}(x, y) dx = xf_y(x, y) - f_y(x, y) + C,$$

denn f_y ist eine Stammfunktion von f_{xy} . Somit ist

$$\int_a^c xf_{xy}(x, y) dx = (c-1)f_y(c, y) - (a-1)f_y(a, y)$$

und

$$\int_R g = \int_b^d y((c-1)f_y(c, y) - (a-1)f_y(a, y)) dy = (c-1) \int_b^d yf_y(c, y) dy - (a-1) \int_b^d yf_y(a, y) dy.$$

Auch diese Integrale berechnen wir wieder nach der Regel zur partiellen Integration: Für jedes $u \in \mathbb{R}$ ist analog zu oben

$$\int yf_y(u, y) dy = yf(u, y) - f(u, y) + C, \text{ also } \int_b^d yf_y(u, y) dy = (d-1)f(u, d) - (b-1)f(u, b).$$

Somit ist

$$\int_R g = (c-1)(d-1)f(c, d) - (c-1)(b-1)f(c, b) - (a-1)(d-1)f(a, d) + (a-1)(b-1)f(a, b).$$