

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12–14. November 2012

- a) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.
- b) Welche Ableitung hat diese Funktion f ?
- c) Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = 2^{2^x}, \quad k(x) = \log(4 - x^2), \quad \ell(x) = \log_{10} x!$$

- d) Berechnen Sie über die Formel $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$ Näherungswerte für die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{10} = \sqrt{9+1}, \quad x_2 = \sqrt[10]{e} = e^{0,1} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{101} = \frac{1}{100+1}!$$

- e) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissensstand in Analysis I erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Gleichung $w'(t) = -\gamma \cdot (w(t) - \beta)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!
- f) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1 \text{ Jahr}) = 60\%$. Welchen Teil seiner Kenntnisse hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach drei Monaten vergessen?
- g) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von 40 m^3 , dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?
- h) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$! Um welche Art von Extrema handelt es sich jeweils?
- i) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms f , so sagen wir, x sei eine r -fache Nullstelle genau dann, wenn es ein Polynom g gibt mit $g(c) \neq 0$, so daß $f(x) = (x - c)^r \cdot g(x)$ ist. Zeigen Sie, daß c genau dann eine mindestens zweifache Nullstelle ist, wenn $f'(c)$ verschwindet.
- j) Zeigen Sie, daß die Ableitung des Polynoms $f(x) = (x^2 - x)(x - 2)(x - 3)$ in jedem der offenen Intervalle $(0, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$ genau eine Nullstelle hat!
- k) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - x + 3$ alle $x \in [-2, 2]$, für die $f'(x)$ gleich dem Differenzenquotienten $\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ ist!