Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Mai 2010

a) Q sei das Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi,4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen x und y:

$$\int_Q xy, \qquad \int_Q y\sin 2x, \qquad \int_Q xye^{2x}, \qquad \int_Q (2-3y\sin xy)\,!$$

Lösung:

$$\int_Q xy = \int_0^4 \left(\int_0^\pi xy\,dx\right) dy = \int_0^4 \left(\frac{\pi^2}{2}y - \frac{0^2}{2}y\right) dy = \left.\frac{\pi^2}{2}\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = 4\pi^2$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^4 xy\,dy\right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{4^2}{2}x - \frac{0^2}{2}x\right) dx = \left.8\frac{y^2}{2}\right|_0^\pi = 4\pi^2$$

$$\int_Q y\sin 2x = \int_0^4 \left(\int_0^\pi y\sin 2x\,dx\right) dy = \int_0^4 \left(y\cdot\frac{-\cos 2\pi}{2} - \frac{-\cos 0}{2}\right) dy = \int_0^4 0\,dy = 0$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^4 y\sin 2x\,dy\right) dx = \int_0^4 \left(\frac{4^2}{2}\cdot\sin 2x\right) dx = \left.8\cdot\frac{-\cos 2x}{x}\right|_0^4 = -4\cos 2\pi + 4\cos 0 = 0$$

$$\int_Q xye^2x = \int_0^4 \left(\int_0^\pi xye^{2x}\,dx\right) dy = \int_0^4 y\cdot\left(\int_0^\pi xe^{2x}\,dx\right) dy$$

Vom Integral in der Klammer kennen wir keine Stammfunktion; um es zu berechnen, verwenden wir die Regel zur *partiellen Integration*

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx \qquad u' = e^{2x},\ \ u = \frac{e^{2x}}{2},\quad v = x,\quad v' = 1$$

und erhalten

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\,.$$

Somit ist $\displaystyle\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} - \frac{-1}{4} = \frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}$ und

$$\int_Q xye^{2x} = \int_0^4 y\left(\frac{(2\pi-1)e^{2\pi}}{4} + \frac{1}{4}\right) dy = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge rechnen wir

$$\int_Q xye^2x = \int_0^\pi \left(\int_0^4 xye^{2x}\,dy\right) dx = \int_0^\pi \frac{4^2}{2}xe^{2x}\,dx = 8\int_0^\pi xe^{2x}\,dx = (4\pi-2)e^{2\pi} + 2\,.$$

Beim letzten Integral schließlich haben wir

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^4 \left(\int_0^\pi (2-3y\sin xy)\,dx\right) dy\,.$$

Die partielle Ableitung von $\cos xy$ nach x ist $-y\sin xy$; die Stammfunktion unseres Integranden bezüglich der Variablen x ist also $2x + 3\cos xy$. Somit ist

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^4 (2\pi + 3\cos \pi y - 3)\, dy = (2\pi-3)y + \left.\frac{3\sin \pi y}{\pi}\right|_0^4 = 8\pi - 12\,.$$

Bei der anderen Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$\int_Q (2-3y\sin xy) = \int_0^\pi \left(\int_0^4 (2-3y\sin xy)\, dy \right) dx\,.$$

Eine Stammfunktion von $y\sin xy$ bezüglich y müssen wir mit partieller Integration suchen; wir setzen $u' = \sin xy$ und $v = y$, also $u = -\frac{\cos xy}{x}$ und $v' = 1$. Somit ist

$$\int y\sin xy\, dy = -\frac{y}{x}\cos xy + \int \frac{\cos xy}{x}\, dy = -\frac{y}{x}\cos xy + \frac{\sin xy}{x^2}$$

und damit

$$\int_0^4 (2-3y\sin xy)\, dy = 2y + \left.\frac{3y}{x}\cos xy\right|_0^4 = 8 + \frac{12\cos 4x}{x} - \frac{3\sin 4x}{x^2}\,.$$

Leider hat weder der zweite noch der dritte Summand eine elementar ausdrückbare Stammfunktion; daß die Ableitung von $3\sin(4x)/x$ gerade die Summe dieser beiden Summanden ist, errät man höchstens mit viel Glück. Zumindest bei diesem letzten Beispiel hängt der Erfolg als wesentlich von der Integrationsreihenfolge ab.

b) Welche der hier angegebenen Punktfolgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und wohin konvergiert sie?

1) $x_n = \sin n, y_n = \cos n$ 2) $x_n = \sin\frac{1}{n}, y_n = \frac{\sin n}{n}$ 3) $x_n = 1 + \frac{n}{1+n^2}, y_n = e^n$

Lösung: Bezüglich der Maximumsnorm (und damit auch bezüglich jeder anderen Norm auf $\mathbb{R}^2$) konvergiert eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn sowohl die Folge der x_n als auch die der y_n konvergiert. Bei *1)* konvergiert offensichtlich keine der beiden; $\sin n$ und $\cos n$ bewegen sich ziemlich chaotisch durch das Intervall $(0, 1)$. Bei *2)* macht das nichts, denn da $|\sin n| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $|y_n| < 1/n$ für allen, also konvergiert die Folge der y_n gegen Null. Die der x_n konvergiert ebenfalls gegen Null, denn $1/n$ ist eine wohlbekannte Nullfolge und der Sinus ist eine stetige Funktion; somit konvergiert x_n gegen $\sin 0 = 0$. Im Falle von *3)* schließlich ist zwar die Folge der x_n konvergent (gegen die Eins), die der y_n divergiert aber bestimmt gegen ∞. Somit konvergiert $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

c) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung $xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x = 5$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

Lösung: Setzen wir $f(x, y) = xy - x\sin y \cdot \cos y - 3x - 5$, so sind das gerade die Punkte, in denen $f_y(x, y) = 2x\sin^2 y$ verschwindet. Das sind einerseits die Punkte mit $x = 0$, andererseits die mit $\sin^2 y = 0$ oder $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $x = 0$ ist $f(0, y) = -5$; es gibt also keine solchen Punkte, für die f verschwindet. Für Punkte mit $y = k\pi$ ist

$$f(x, y) = xy - 3x - 5 = x(y-3) - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{y-3} = \frac{5}{k\pi - 3}\,;$$

die Gleichung ist also überall eindeutig nach y auflösbar außer in den Punkten der Form

$$\left(k\pi,\ \frac{5}{k\pi-3}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

d) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0, y_0), in deren Umgebung diese Gleichung eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der dadurch definierten Funktion $\varphi(x)$!

Lösung: $\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = \dfrac{\sin y \cos y + 3 - y}{2x \sin^2 y}$.

e) Welche der folgenden Mengen ist kompakt?

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| \le 1\}, \qquad M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y+3)^2 \le 100\},$$
$$M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\}$$

Lösung: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. M_1 ist offensichtlich nicht beschränkt und damit nicht kompakt: Sie enthält beispielsweise alle Punkte der Form $(n, \frac{1}{n})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Menge M_3 ist nicht abgeschlossen, denn beispielsweise ist $(1,1)$ ein Randpunkt von M_3, liegt aber nicht in M_3. Somit ist auch M_3 nicht kompakt.

M_2 ist abgeschlossen, denn $f(x,y) = (x+2)^2 + (y+3)^2$ ist eine stetige Funktion und somit ist die Menge aller Punkte, für die $f(x,y)$ kleiner oder gleich einer vorgegebenen Schranke ist, abgeschlossen. M_2 ist auch beschränkt, denn da Quadrate nicht negativ sein können, ist $|x+2| \le 10$, also $|x| \le 12$, und $|y+3| \le 10$, also $|y| \le 13$. Damit ist M_2 kompakt.

f) Ein Produkt werde unter Benutzung von zwei Ausgangsstoffen hergestellt, die 100 Euro *bzw.* 800 Euro pro Tonne kosten. Aus x Tonnen des ersten und y Tonnen des zweiten Stoffes lassen sich in z Stunden Arbeit $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Stück des Produkts fertigen; dabei kostet eine Arbeitsstunde 120 Euro. Welche Stückzahl kann für 240 000 Euro maximal hergestellt werden?

Lösung: In Mathematik übersetzt besteht das Problem darin, daß die Funktion

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

unter der Nebenbedingung $100x + 800y + 120z \le 240\,000$ maximiert werden muß. Da f in jeder der drei Variablen x, y, z monoton wächst, muß diese Summe im Maximum tatsächlich gleich 240 000 sein, die Nebenbedingung kann also auch geschrieben werden als

$$g(x,y,z) = 100x + 800y + 120z - 240\,000 = 0\,.$$

Außerdem nimmt f auch unter der ursprünglichen Nebenbedingung positive Werte an; daher ist im Maximum keine der drei Variablen gleich Null.

In jedem Extremum von f unter dieser Nebenbedingung sind die Gradienten von f und g linear abhängig; da $\operatorname{grad} g$ als konstanter Vektor nirgends verschwindet, muß es also eine Beziehung der Form $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ geben. Ausgeschrieben und nach Komponenten getrennt wird diese Bedingung zu

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 100\,\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 800\,\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 120\,\lambda \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}/5 &= \lambda \\ x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80 &= \lambda \\ x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}/12 &= \lambda\,. \end{aligned}$$

Gleichsetzen der letzten beiden linken Seiten ergibt

$$x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80 = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}/12$$

oder

$$\frac{z}{80} = \frac{y}{12}\,, \quad \text{d.h.} \quad z = \frac{20y}{3}\,.$$

Entsprechend ergibt Gleichsetzen der oberen beiden linken Seiten

$$x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}/5 = x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80$$

oder $16y = x$. Die Nebenbedingung wird somit zu

$$100 \cdot 16y + 800y + 120 \cdot \frac{20}{3}y = 240\,000\,,$$

d.h. $3200y = 240\,000$ und damit $y = 75$, $x = 1200$ und $z = 500$. Der maximale Wert, den f unter der Nebenbedingung $g = 0$ annehmen kann ist daher

$$f(1200, 75, 500) = 50 \cdot \sqrt[5]{1200^2 \cdot 75 \cdot 500} \approx 7005{,}7\,,$$

d.h. maximal können 7005 Stück produziert werden.

g) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \le 1\right\}$ geometrisch und bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ auf M!

Lösung: M ist eine Ellipse mit Halbachsen drei und vier. Ein Extremum im Innern ist einfach ein lokales Extremum von f, also verschwinden dort die Partiellen Ableitungen $2x$ und $-2y$ von f. Dies geschieht nur im Nullpunkt; er ist offensichtlich ein Sattelpunkt, denn die Hesse-Matrix ist die Diagonalmatrix mit Einträgen ± 2, hat also Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen.

Für ein Extremum auf dem Rand müssen die Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}x \\ \frac{1}{8}y \end{pmatrix}$$

proportional sein, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $x = \frac{9}{2}\lambda x$ und $y = -8\lambda x$ ist, d.h.

$$x(2 - 9\lambda) = y(1 + 8\lambda) = 0\,.$$

Da der Nullpunkt nicht auf dem Rand liegt, muß eine der beiden Klammern verschwinden. Im Falle $\lambda = -8$ ist $x = 0$ und damit, da $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ ist, $y = \pm 4$. In beiden Fällen ist $f(x,y) = -y^2 = -16$.

Wenn $2 - 9\lambda$ verschwindet, ist $y = 0$, also $x = \pm 3$; in beiden Fällen ist $f(x,y) = 9$.

Weitere Kandidaten für Extrema gibt es nicht; da f als stetige Funktion auf dem Kompaktum M sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annehmen muß, haben wir also in den Punkten $(\pm 3, 0)$ Maxima und in $(0, \pm 4)$ Minima.

h) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto e^{xy} - x^2 e^y + y^2 e^x - xy \end{cases} \quad !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von Schwarz anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= ye^{xy} - 2xe^y + y^2e^x - y \\ f_y(x,y) &= xe^{xy} - x^2e^y + 2ye^x - x \\ f_{xx}(x,y) &= y^2e^{xy} - 2e^y + y^2e^x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= (1+xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 \\ f_{yy}(x,y) &= x^2e^{xy} - x^2e^y + 2e^x \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} - 2xe^y + y^2e^x - y \\ xe^{xy} - x^2e^y + 2ye^x - x \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} - 2e^y + y^2e^x & (1+xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 \\ (1+xy)e^{xy} - 2xe^y + 2ye^x - 1 & x^2e^{xy} - x^2e^y + 2e^x \end{pmatrix}\,.$$

i) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix der Funktion $\vec{V}$: $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \sin xy \\ \cos^2 xy \end{pmatrix} \end{cases}$!

Lösung: Die erste Komponente $xy \sin xy$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$y \sin xy + xy^2 \cos xy \quad \text{und} \quad x \sin xy + x^2 y \cos xy ;$$

für die zweite Komponente $\cos^2 xy$ erhalten wir entsprechend

$$-2y \sin xy \cos xy \quad \text{und} \quad -2x \sin xy \cos xy .$$

Also ist $J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} y \sin xy + xy^2 \cos xy & x \sin xy + x^2 y \cos xy \\ -2y \sin xy \cos xy & -2x \sin xy \cos xy \end{pmatrix}$.

j) Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x,y) = (x+1)^2 + (y+1)^2$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 8$!

Lösung: Für ein Extremum im Innern der Kreisscheibe muß der Gradient von f verschwinden, d.h.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat offensichtlich nur die Lösung $(-1,-1)$. Dort, wie auch in jedem anderen Punkt, ist die HESSE-Matrix von f gleich $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also positiv definit. Somit hat f in $(-1,-1)$ ein Minimum, was natürlich auch so klar war, denn f nimmt nur nichtnegative Werte an und verschwindet genau in diesem Punkt. Weitere Extrema im Innern gibt es nicht.

Für Extrema auf dem Rand muß $\nabla f(x,y)$ linear abhängig vom Gradienten der Nebenbedingungsfunktion $g(x,y) = x^2+y^2-8$ sein; da dieser auf dem Rand nirgends verschwindet, muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, kann es offensichtlich kein solches λ geben; andernfalls können wir durch x *bzw.* y dividieren und erhalten die Bedingung

$$\frac{x+1}{x} = \frac{y+1}{y} \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{1}{x} = \frac{1+1}{y} \quad \text{oder} \quad x = y .$$

Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 8$ zeigt, daß dann $x = y = \pm 2$ sein muß. Da

$$f(2,2) = 3^2 + 3^2 = 18 \quad \text{und} \quad f(-2,-2) = 1^2 + 1^2 = 2$$

ist, nimmt f also in $(2,2)$ seinen Maximalwert auf dem Rand und damit auch auf der gesamten Menge an; in $(-2,-2)$ haben wir den Minimalwert auf dem Rand, der aber größer ist als das absolute Minimum.

Alternative Lösung: Die Funktion $f(x,y)$ ist das Quadrat des Abstands zwischen den Punkten (x,y) und $(-1,-1)$; sie ist genau dann maximal *bzw.* minimal, wenn dieser Abstand maximal *bzw.* minimal ist. Damit ist klar, daß das absolute Minimum bei $(-1,-1)$ liegt.

Die Extremwerte auf dem Rand sind die beiden Punkte der Kreislinie, die maximalen *bzw.* minimalen Abstand vom inneren Punkt $(-1,1)$ des Kreises haben. Solche Punkte sind Lotfußpunkte, ihre Verbindungsgeraden zu $(-1,1)$ stehen also senkrecht auf den Tangenten und gehen somit durch den Mittelpunkt des Kreises. Die Gerade durch dem Mittelpunkt $(0,0)$ und $(-1,-1)$ ist die erste Winkelhalbierende $y = x$; sie schneidet in $(2,2)$ und $(-2,2)$, wobei $(2,2)$ offensichtlich der weiter entfernte, also das Maximum ist.

k) Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = ae^{t_i} + be^{-t_i} + c$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, c, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Parameter a, b, c den hundert linearen Gleichungen

$$e^{t_i} \cdot a + e^{-t_i} \cdot b + c = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} e^{t_1} & e^{-t_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{t_{100}} & e^{-t_{100}} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix} .$$

Dieses lineare Gleichungssystem für a, b, c wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h. hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^tAA) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$. Ausgeschrieben wird das, da $e^{t_i} \cdot e^{-t_i} = 1$ nicht von i abhängt, zu

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{100} e^{2t_i} & 100 & \sum\limits_{i=1}^{100} e^{t_i} \\ 100 & \sum\limits_{i=1}^{100} e^{-2t_i} & \sum\limits_{i=1}^{100} e^{-t_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{100} e^{t_i} & \sum\limits_{i=1}^{100} e^{-t_i} & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{100} e^{t_i} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{100} e^{-t_i} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{100} x_i \end{pmatrix} .$$

l) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion f: $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y^2, y + x^2) \end{cases}$!

Lösung: Ist $(x, y) = (x - y^2, y + x^2)$, so muß $x = x - y^2$ und $y = y + x^2$ sein, also $x^2 = y^2 = 0$ und damit $x = y = 0$. Der Nullpunkt ist also der einzige Fixpunkt.

m) Zeigen Sie, daß es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $2x = \cos^2 x$, und geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Wert konvergiert!

Lösung: Wenn wir zeigen können, daß die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{2}\cos^2 x$ kontrahierend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunkts aus dem BANACHschen Fixpunktsatz. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft wiederum genügt es, den Betrag der Ableitung durch eine Schranke echt kleiner eins abzuschätzen. Die Ableitung von $\frac{1}{2}\cos^2 x$ ist $\sin x \cos x$; wir müssen also diese Funktion abschätzen. Da $\cos^2 x$ für alle x in $[0, 1]$ liegt, muß jedes x mit $2x = \cos^2 x$ in $[0, \frac{1}{2}]$ liegen; wir können uns also auf dieses Intervall beschränken. Dort ist, wie überall, $|\cos x| \le 1$, und der Sinus liegt hier zwischen Null und $\sin(\frac{1}{2}) \approx 0{,}45$. Somit ist $|\sin x \cos x| \le \sin(\frac{1}{2}) < 1$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$, und wir können dem BANACHschen Fixpunktsatz anwenden. Er sagt uns auch, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 0$ (oder sonst ein beliebiger Wert) und $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos^2 x_n$ für $n \to \infty$ gegen die Lösung konvergiert.