WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Mai 2010

a) Q sei das Rechteck mit Ecken $(0,0)$ und $(\pi,4)$. Berechnen Sie die folgenden Integrale jeweils für beide möglichen Anordnungen der Variablen x und y:

$$\int_Q xy, \qquad \int_Q y\sin 2x, \qquad \int_Q xye^{2x}, \qquad \int_Q (2-3y\sin xy)\,!$$

b) Welche der hier angegebenen Punktfolgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und wohin konvergiert sie?

1) $x_n = \sin n, y_n = \cos n$ 2) $x_n = \sin\frac{1}{n}, y_n = \frac{\sin n}{n}$ 3) $x_n = 1+\frac{n}{1+n^2}, y_n = e^n$

c) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, in denen die Gleichung $xy - x\sin y\cdot\cos y - 3x = 5$ nicht eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

d) Berechnen Sie für alle Punkte (x_0,y_0), in deren Umgebung diese Gleichung eindeutig nach y aufgelöst werden kann, die Ableitung der dadurch definierten Funktion $\varphi(x)$!

e) Welche der folgenden Mengen ist kompakt?

$$M_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |xy|\le 1\right\}, \qquad M_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2+(y+3)^2\le 100\right\},$$
$$M_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|+|y|<2\right\}$$

f) Ein Produkt werde unter Benutzung von zwei Ausgangsstoffen hergestellt, die 100 Euro *bzw.* 800 Euro pro Tonne kosten. Aus x Tonnen des ersten und y Tonnen des zweiten Stoffes lassen sich in z Stunden Arbeit $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Stück des Produkts fertigen; dabei kostet eine Arbeitsstunde 120 Euro. Welche Stückzahl kann für 240 000 Euro maximal hergestellt werden?

g) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2\le 1\right\}$ geometrisch und bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y)=x^2-y^2$ auf M !

h) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto e^{xy}-x^2e^y+y^2e^x-xy \end{cases} !$$

i) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix der Funktion $\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y)\mapsto \begin{pmatrix} xy\sin xy \\ \cos^2 xy \end{pmatrix} \end{cases}$!

j) Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$ auf der Kreisscheibe $x^2+y^2\le 8$!

k) Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i,x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = ae^{t_i}+be^{-t_i}+c$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a,b,c, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

l) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y)\mapsto (x-y^2, y+x^2) \end{cases}$!

m) Zeigen Sie, daß es genau ein $x\in\mathbb{R}$ gibt mit $2x=\cos^2 x$, und geben Sie eine Folge an, die gegen diesen Wert konvergiert!