WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Mai 2010

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } |x| \le 1/n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, daß die Folge $f_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegen Null konvergiert!

Lösung: Für jedes $x \neq 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|x| > 1/N$ ist. Damit ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \ge N$, also ist auch der Grenzwert Null.

b) Konvergiert die Folge der Funktionen (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Lösung: *Nein,* denn sonst gäbe es beispielsweise zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(x)| < \varepsilon$ wäre für alle $n \ge N$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tatsächlich ist aber $f_n(1/n) = n \ge 1$ sogar für alle n.

c) Richtig oder falsch: Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen e^x!

Lösung: Nach dem Satz über die TAYLOR-Entwicklung ist

$$e^x = f_n(x) + R_{n+1}(x) \quad \text{mit} \quad R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

für ein ξ zwischen Null und x. Für $x \in [-10, 10]$ liegt insbesondere auch ξ in diesem Intervall; also ist

$$|e^x - f_n(x)| = |R_n(x)| \le \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} e^{10} .$$

Die rechte Seite ist unabhängig von x und definiert für $n \to \infty$ eine Nullfolge, denn für $n \ge 20$ ist

$$\frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^{20}}{20!} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{10}{22} \cdots \frac{10}{n+1} \le \frac{10^{20}}{20!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-19} .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|e^x - f_n(x)| = |R_n(x)| \le \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} e^{10} < \varepsilon$$

ist für alle $x \in [-10, 10]$ und alle $n \ge N$. Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz.

d) Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

Lösung: *Nein;* $f_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n; daher ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, je nach Parität von n. Da $|e^x| \le 1$ für alle $x \le 0$, wächst $|e^x - f_n(x)|$ unbegrenzt für $x \to -\infty$.

e) $f: D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem sei I eine abgeschlossene Menge, und es gebe eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \le M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

Lösung: Zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus I gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein ξ zwischen x und y, so daß

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

ist. Da I ein Intervall ist, liegt mit x und y auch ξ in I, also ist $|f'(\xi)| \leq M < 1$. Somit ist
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq M, \quad \text{also} \quad |f(x)-f(y)| \leq M\,|x-y| \ .$$
Da $M < 1$ ist und I eine abgeschlossene Menge, erfüllt f auf I die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes, aus dem die Behauptung folgt.

NB: Wenn I ein endliches Intervall ist, muß es natürlich ein abgeschlossenes Intervall sind. Unter den unendlichen Intervallen sind aber für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ abgeschlossene Mengen, genauso $\mathbb{R}$ selbst. In keinem der drei Fälle reden wir von einem abgeschlossenen Intervall.

f) Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von HERON?

Lösung: Die Abbildung, um die es hier geht, ist natürlich
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) ,$$
wobei $a > 0$ die reelle Zahl ist, deren Wurzel wir berechnen wollen. $f(x)$ ist offensichtlich nicht definiert für $x = 0$. Um zu zeigen, daß sie die Kontraktionseigenschaft aus dem BANACHschen Fixpunktsatz erfüllt, können wir, wie wir oben gesehen haben, die Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$
betrachten; sie ist offensichtlich nicht nach unten beschränkt für $x \to 0$. Da a und x^2 positiv sind, ist sie aber nach oben beschränkt durch $\frac{1}{2}$. Der Betrag ist daher genau dann kleiner als eins, wenn $f'(x) > -1$ ist, also
$$\frac{a}{x^2} < 3 \quad \text{oder} \quad x^2 > \frac{a}{3} \ .$$
Da wir eine abgeschlossene Menge brauchen und eine Schranke, die *echt* kleiner als eins ist, müssen wir also ein $b > \sqrt{a/3}$ wählen und uns auf die Menge aller reeller Zahlen größer oder gleich x beschränken. Dabei muß b natürlich so sein, daß $f(x)$ für alle $x \geq b$ wieder größer oder gleich b ist. Eine naheliegende Möglichkeit ist etwa $b = \sqrt{a/2}$. Mit der Schranke gibt es keine Probleme; wir müssen nur sehen, daß für $x \geq \sqrt{b/2}$ auch $f(x) \geq \sqrt{b/2}$ ist. Das ist aber klar, denn wie wir im letzten Semester gesehen haben, ist beim HERON-Verfahren $f(x) > \sqrt{a}$ für alle positiven $x < \sqrt{a}$.

g) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

Lösung: Wir betrachten die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$ und wenden darauf den Satz aus der vorletzten Aufgabe an: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ geht für $x \to \pm\infty$ gegen Null, denn e^{x^2} wächst schneller als jedes Polynom. Um die lokalen Extrema von g zu bestimmen, leiten wir noch einmal ab:
$$g''(x) = -2e^{-x^2} + (2x)^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$$
verschwindet für $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ und
$$g'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp\sqrt{2}e^{-1/2} = \mp\sqrt{\frac{2}{e}} \ .$$
Somit ist $|g'(x)| \leq M = \sqrt{2/e} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, Nach der vorletzten Aufgabe erfüllt g somit die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes; es gibt also genau einen Fixpunkt, d.h. genau eine Nullstelle von f, und diese ist z.B. der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = e^{-x_n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

h) *Richtig oder falsch:* V sei ein BANACH-Raum, und $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes. Dann ist f gleichmäßig stetig auf V.

Lösung: Wir haben eine reelle Zahl $q \in [0, 1)$, so daß $\|f(y) - f(x)\| \le q\,\|y - x\|$ ist für alle $x, y \in V$. Falls $q = 0$ ist, ist f konstant, also gleichmäßig stetig. Andernfalls sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $\delta = \varepsilon/q$. Für zwei Punkte $x, y \in V$ mit $\|y - x\| < \delta$ ist dann

$$\|f(y) - f(x)\| \le q\,\|y - x\| < q\delta = q\frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon\,.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f.

i) V sei ein BANACH-Raum, und $f\colon V \to V$ erfülle die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \le q\,\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ und ein festes $q < 1$. Weiter sei x^* ein Fixpunkt von f, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei x_k rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\|\ .$$

Lösung: Nach dem BANACHschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge der x_k gegen x^*. Für jeden Index j ist wegen Kontraktionseigenschaft

$$\|x_{j+1} - x_j\| \le q\,\|x_j - x_{j-1}\| \le q^2\,\|x_{j-1} - x_{j-2}\| \le \cdots \le q^j\,\|x_1 - x_0\|\ ;$$

daher ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung und der Summenformel für geometrische Reihen

$$\begin{aligned}\|x_m - x_k\| &= \left\|\sum_{j=k}^{m-1}(x_{j+1} - x_j)\right\| \le \sum_{j=k}^{m-1}\|x_{j+1} - x_j\| \le \sum_{j=k}^{m-1} q^j\,\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{q^k - q^m}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\|\ .\end{aligned}$$

Da die Folge der x_m gegen x^* konvergiert, konvergiert die Folge $(x_m - x_k)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen $x^* - x_k$; wegen der Stetigkeit der Norm konvergiert dann auch die Folge der Normen $\|x_m - x_k\|$ gegen $\|x^* - x_k\|$. Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist jedes einzelne Folgenglied kleiner oder gleich $q^k/(1-q)$, also auch der Grenzwert.

j) Berechnen Sie im BANACH-Raum $\mathcal{C}^0\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ die ersten Glieder der Folge von Funktionen mit $f_0(x) = 1$ und

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,,$$

und erraten Sie deren Grenzwert!

Lösung:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_0(t) - 2\big)\,dt = 1 - \int_0^x 2t\,dt = 1 - x^2\\ f_2(x) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_1(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2}\\ f_3(t) &= 1 + \int_0^x 2t\cdot\big(f_2(t) - 2\big)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(-1 - t^2 - \tfrac{1}{2}t^4)\,dt = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\,.\end{aligned}$$

Dies sieht nach Fakultäten im Nenner aus, allerdings sind die Exponenten doppelt so groß wie bei der Exponentialfunktion und auch die Vorzeichen sind, abgesehen vom ersten, minus statt plus. Also müssen wir e^{x^2} betrachten und dies geeignet modifizieren:

$$-e^{x^2} = -1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots \quad\Longrightarrow\quad 2 - e^{x^2} = 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} - \cdots\ .$$

Wir erwarten daher den Grenzwert

$$f(x) = 2 - e^{x^2} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!} \quad\text{und}\quad f_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

Die letztere Formel läßt sich leicht durch vollständige Induktion beweisen: Für $n = 1$ ist sie richtig, und wenn sie für ein $n \geq 1$ gilt, ist

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x 2t\bigl(f_n(t) - 2\bigr)\,dt = 1 + \int_0^x 2t\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k}}{k!} - 2\right) dt \\ &= 1 + \int_0^x \left(-2t - \sum_{k=1}^{n} \frac{2t^{2k+1}}{k!}\right) dt = 1 - \int_0^x 2t\,dt - \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \frac{2t^{2k+1}}{k!}\,dt \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2x^{2k+2}}{k! \cdot (2k+2)} = 1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{2k}}{k!}\,, \end{aligned}$$

wie behauptet.

k) Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x t\bigl(f(t) - 2\bigr)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x\bigl(f(x) - 2\bigr)$$

erfüllt!

Lösung:

$$1 + \int_0^x 2t\bigl(f(t) - 2\bigr)\,dt = 1 + \int_0^x 2t(2 - e^{t^2} - 2)\,dt = 1 - \int_0^x 2te^{t^2}\,dt\,.$$

Die Ableitung von e^{x^2} ist $2xe^x$, also ist dies gleich $1 - e^{x^2} + 1 = 2 - e^{x^2}$. Die Aussage über die Ableitung rechnet man sofort nach.

l) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| x \geq 0\bigr\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz?

Lösung: Für einen Fixpunkt x von f wäre $x = f(x) = x + \frac{1}{1+x}$, also $\frac{1}{1+x} = 0$. Das ist offensichtlich nicht möglich. Trotzdem ist für alle $x \neq y$ aus $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left|y - x + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|y - x + \frac{(1+x) - (1+y)}{(1+x)(1+y}\right| \\ &= |y - x|\left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) < |y - x|\;. \end{aligned}$$

Dies widerspricht nicht dem BANACHschen Fixpunktsatz, denn da x und y beliebig groß werden können, kommt der Ausdruck in der Klammer der Eins beliebig nahe; es gibt also kein $q < 1$, so daß $|f(y) - f(x)| \leq q\,|y - x|$ wäre. So ein q gibt es nur, wenn wir uns auf ein nach oben beschränktes Intervall beschränken; da $f(x) > x$ für alle $x \geq 0$ wird ein solches Intervall aber von f nicht auf sich selbst abgebildet.

m) V sei ein BANACH-Raum, $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq V$ und $K \subseteq D$ eine kompakte Teilmenge mit $f(K) \subseteq K$. Zeigen Sie: Ist $\|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$ für alle $x, y \in K$, so hat f mindestens einen Fixpunkt auf K. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über die Existenz von Maxima und Minima auf kompakten Mengen.)

Lösung: Die stetige Abbildung $x \mapsto \|f(x) - x\|$ nimmt auf K ihr Minimum an. Ist dieses Minimum gleich Null, so gibt es ein $x \in K$ mit $\|f(x) - x\| = 0$, also $f(x) = x$, und wir sind fertig.

Andernfalls ist dieses Minimum eine positive Zahl $d > 0$; es werde angenommen im Punkt $x \in K$. Dann ist also $\|f(x) - x\| = d$ und $\bigl\|f\bigl(f(x)\bigr) - f(x)\bigr\| < \|f(x) - x\| = d$, im Widerspruch zur Minimalität von d.