Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Mai 2010

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } |x| \le 1/n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Zeigen Sie, daß die Folge $f_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegen Null konvergiert!

b) Konvergiert die Folge der Funktionen (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

c) *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[-10, 10]$ gleichmäßig gegen e^x !

d) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion?

e) $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, und für ein (nicht notwendigerweise endliches) Intervall $I \subseteq D$ sei $f(I) \subseteq I$. Außerdem sei I eine abgeschlossene Menge, und es gebe eine reelle Zahl $M < 1$, so daß $|f'(x)| \le M$ ist für alle $x \in I$. Zeigen Sie, daß es dann genau ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$!

f) Was liefert Ihnen die vorige Aufgabe für die Konvergenz des Verfahrens von Heron?

g) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = e^{-x^2} - x$ genau eine Nullstelle hat und geben Sie eine Folge an, die gegen diese Nullstelle konvergiert!

h) *Richtig oder falsch:* V sei ein Banach-Raum, und $f\colon V \to V$ erfülle die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Dann ist f gleichmäßig stetig auf V.

i) V sei ein Banach-Raum, und $f\colon V \to V$ erfülle die Ungleichung $\|f(x) - f(y)\| \le q\,\|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ und ein festes $q < 1$. Weiter sei x^* ein Fixpunkt von f, $x_0 \in V$ ein beliebiger Punkt, und für $k \in \mathbb{N}$ sei x_k rekursiv definiert durch $x_k = f(x_{k-1})$. Zeigen Sie:

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{q^k}{1-q}\,\|x_1 - x_0\| \,.$$

j) Berechnen Sie im Banach-Raum $\mathcal{C}^0\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ die ersten Glieder der Folge von Funktionen mit $f_0(x) = 1$ und

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x 2t\big(f_{n-1}(t) - 2\big)\,dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,,$$

und erraten Sie deren Grenzwert!

k) Zeigen Sie, daß die erratene Funktion die Gleichungen

$$f(x) = 1 + \int_0^x t\big(f(t) - 2\big)\,dt \quad \text{und} \quad f'(x) = -2xf(x)$$

erfüllt!

l) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\ge 0} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\big\}$ keinen Fixpunkt hat, daß aber trotzdem gilt: $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ für alle $x \ne y$ aus $\mathbb{R}_{\ge 0}$! Warum widerspricht dies nicht dem Banachschen Fixpunktsatz?

m) V sei ein Banach-Raum, $f\colon D \to V$ eine stetige Abbildung auf $D \subseteq V$ und $K \subseteq D$ eine kompakte Teilmenge mit $f(K) \subseteq K$. Zeigen Sie: Ist $\|f(y) - f(x)\| < \|y - x\|$ für alle $x, y \in K$, so hat f mindestens einen Fixpunkt auf K. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz über die Existenz von Maxima und Minima auf kompakten Mengen.)