Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. April 2010

a) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wenn sie kompakt und zusammenhängend ist.

Lösung: Ein abgeschlossenes Intervall ist natürlich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; außerdem ist jedes Intervall zusammenhängend.

Umgekehrt ist auch jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Intervall, und wenn sie auch noch kompakt ist, muß sie insbesondere abgeschlossen sein, also ein abgeschlossenes Intervall.

b) Die *Lemniskate* $\mathcal{L}_a$ ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t} \quad \text{und} \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} .$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist!

Lösung: Da Sinus und Kosinus periodisch sind mit Periode 2π, ist $\mathcal{L}_a$ das Bild des abgeschlossenen Intervalls $[0, 2\pi]$ unter der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) .$$

Beide Komponenten entstehen durch Verknüpfung von trigonometrischen Funktionen und Grundrechenarten, wobei der Nenner $1 + \sin^2 t$ nie verschwinden kann. Daher sind beide Komponenten stetig, also auch φ. Daraus folgt die Behauptung, denn das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder kompakt, und das einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

c) Zeigen Sie, daß die Hyperbel $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ nicht als Bild eines (endlichen oder unendlichen) Intervalls unter einer stetigen Abbildung dargestellt werden kann!

Lösung: Jedes solche Bild wäre zusammenhängend, die Hyperbel aber hat zwei Äste. Formal: Die offenen Mengen $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ und $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ haben leeren Durchschnitt, und H liegt in $U \cup V$, aber weder ganz in U noch ganz in V.

d) Zeigen Sie: $H \cap \mathcal{L}_3 \neq \emptyset$!

Lösung: Dies ist äquivalent dazu, daß die stetige Funktion $f(x, y) = xy$ auf $\mathcal{L}_3$ den Wert eins annimmt. Da $\mathcal{L}_3$ zusammenhängend ist, ist $f(\mathcal{L}_3)$ ein Intervall; es reicht also zu zeigen, daß f sowohl größere als auch kleinere Werte annehmen kann. Für den Punkt

$$(x, y) = \left(\frac{3 \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{3 \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad \text{ist} \quad f(x, y) = \frac{9 \cos^2 t \sin t}{\left(1 + \sin^2 t\right)^2} .$$

Für jedes ganzzahlige Vielfache t von $\frac{\pi}{2}$ verschwindet der Zähler; im entsprechenden Kurvenpunkt ist also $f(x, y) = 0 < 1$. Um auch einen größeren Wert zu erhalten, können wir beispielsweise $t = \frac{\pi}{4}$ einsetzen; dann ist $\cos t = \sin t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also

$$f(x, y) = \frac{9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2} > 1 .$$

Daher gibt es auch Punkte $(x, y) \in \mathcal{L}_3$ mit $f(x, y) = 1$, also Schnittpunkte von $\mathcal{L}_3$ mit H.

e) Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem
$$x^4 + y^4 = 2 \quad \text{und} \quad x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5 = 4$$
mindestens eine reelle Lösung hat!

Lösung: Wir überlegen uns als erstes, daß die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 2\}$ zusammenhängend ist: Für jedes $(x, y) \in M$ muß $|x| \le \sqrt[4]{2}$ sein, und für jedes x mit $|x| \le \sqrt[4]{2}$ ist (x, y) mit $y = \pm\sqrt[4]{2 - x^4}$ ein Punkt aus M. Da die beiden Abbildungen $x \mapsto \pm\sqrt[4]{2 - x^4}$ stetig sind, können wir daher für jeden Punkt $(x, y) \in M$ mit mindestens einer der beiden Funktionen einen Weg durch M definieren, der (x, y) mit $(\sqrt[4]{2}, 0)$ verbindet. Da somit jeder Punkt mit diesem festen Punkt verbunden werden kann, ist M wegzusammenhängend und damit zusammenhängend. Wir müssen zeigen, daß die linke Seite der zweiten Gleichung irgendwo auf dieser Menge den Wert vier annimmt. Da Polynome stetig sind, ist die Menge aller Werte, die dort angenommen werden, ein Intervall; es reicht also, wenn wir Punkte finden, in denen Werte größer vier angenommen werden, und andere mit Werten kleiner vier.

Die einzigen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in M sind $(\pm 1, \pm 1)$; schauen wir daher als erstes, welche Werte wir dort bekommen: Für $(1, 1)$ erhalten wir $1+2+3+5 = 11 > 4$, und für $(1, -1)$ haben wir den Wert $1 + 2 - 3 - 5 = -5 < 4$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

f) Zeigen Sie: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ und $\tan(x^2 + y^2) = e^{xy}\cos(\pi x^2)$!

Lösung: Da die durch $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ definierte offene Kreisscheibe zusammenhängend ist, wird sie von der stetigen Funktion
$$f(x, y) = \tan(x^2 + y^2) - e^{xy}\cos(\pi x^2)$$
auf ein Intervall abgebildet. Es genügt daher, wenn wir einen Punkt (x, y) aus dieser Kreisscheibe finden, in dem $f(x, y)$ positiv ist, und einen anderen, in dem es negativ ist.

Der einfachste Punkt zum Einsetzen ist $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = -1$. Die Funktion wird auch dann relativ einfach, wenn wir den Kosinus zum Verschwinden bringen, also $x = \pm\sqrt{1/2}$ setzen. Dann ist $f(x, y) = \tan(\frac{1}{2} + y^2) > 0$, denn $\frac{1}{2} + y^2$ muß kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein. Somit nimmt f auch den Wert Null an.

g) Zur stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es im Intervall $[a, b]$ einen Punkt c mit $f(c) < a$ und einen Punkt d mit $f(d) > b$. Zeigen Sie, daß es mindestens ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

Lösung: Die stetige Funktion $g(x) = f(x) - x$ hat an der Stelle $x = c$ den Wert $f(c) - c$; da $f(c) < a$, aber $c \ge a$ ist, ist dies eine negative Zahl. Entsprechend folgt, daß $g(d) = f(d) - b$ positiv ist, denn $f(d) > b$, aber $d \le b$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein x zwischen c und d, also insbesondere aus $[a, b]$, für das $g(x) = 0$ ist, d.h. $f(x) = x$, wie behauptet.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen, so ist die Folge der Paare (x_n, x_{n+1}) eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}^2$.

Lösung: *Richtig:* Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|x_m - x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n, m \ge N$. Damit ist für $m, n > N$ auch
$$\|(x_m, x_{m+1}) - (x_n, x_{n+1})\|_\infty = \max\bigl\{|x_m - x_n|, |x_{m+1} - x_{n+1}|\bigr\} < \varepsilon,$$
wir haben also eine CAUCHY-Folge.

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}^p$, und $K \subset \mathbb{R}^p$ sei eine kompakte Teilmenge, die alle x_n enthalte. Weiter sei $f\colon D \to \mathbb{R}^q$ eine stetige Abbildung und $K \subseteq D$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge $\bigl(f(x_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^q$ eine CAUCHY-Folge ist!

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben; wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so daß $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$ ist für alle $n, m \geq N$. Da f stetig ist und K kompakt, ist f auf K sogar gleichmäßig stetig; es gibt also ein $\delta > 0$, so daß $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$ ist für alle $x, y \in K$ mit $\|y - x\| < \delta$. Zu diesem δ wiederum gibt es, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|x_m - x_n\| < \delta$ für alle $n, m > N$. Da alle x_n in K liegen, ist dann auch $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$, wie verlangt.

j) Zeigen Sie, daß man bei der vorigen Aufgabe nicht auf die Kompaktheit von K verzichten kann!

Lösung: Wir betrachten die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, die als konvergente Folge reeller Zahlen natürlich eine CAUCHY-Folge ist. Alle Folgenglieder liegen in der (nicht kompakten) Menge $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig und $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trotzdem ist die Folge der Zahlen $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ natürlich keine CAUCHY-Folge.

k) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, x_1 eine reelle Zahl, und durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geq 2$ sei rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: Konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$, so ist x ein Fixpunkt von f!

Lösung: Ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, so ist wegen der Stetigkeit von f

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,.$$

l) Zeigen Sie: Für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \sin x_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegen Null!

Lösung: Für $n \geq 2$ ist $|x_n| = |\sin x_{n-1}| \leq 1$. Da $\sin x$ für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ das gleiche Vorzeichen hat wie x, haben außerdem alle x_n mit $n \geq 2$ dasselbe Vorzeichen.

Ist $x_2 = 0$, sind auch alle weiteren $x_n = 0$ und wir sind fertig. Ist $x_2 > 0$, so ist die Folge der x_n ab $n = 2$ streng monoton fallend, da $\sin x < x$ für alle $x > 0$; außerdem ist sie nach unten beschränkt, da alle $x_n > 0$ sind. Als monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und nach der vorigen Aufgabe erfüllt der Grenzwert x die Gleichung $\sin x = x$. Somit ist auch hier $x = 0$.

Ist $x_2 < 0$, erhalten wir entsprechend eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge, und wieder folgt, daß der Grenzwert Null ist.

m) Finden Sie alle Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^2 + c$, und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!

Lösung: $x^2 + c = x$ genau dann, wenn x die quadratische Gleichung

$$x^2 - x + c = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4} = 0$$

erfüllt, wenn also

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$$

ist. Somit gibt es genau dann (reelle) Fixpunkte, wenn $c \leq \frac{1}{4}$ ist. Ein Fixpunkt ist stabil, wenn der Betrag der Ableitung von f dort kleiner als eins ist; wir haben also die Bedingung

$$|2x| = \left|\,1 - \sqrt{1 - 4c}\,\right| < 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 - 4c} < 2\,.$$

Somit muß $1 - 4c < 4$ oder $c > -\frac{3}{4}$ sein.