Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. April 2010

a) Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, wenn sie kompakt und zusammenhängend ist.

b) Die *Lemniskate* $\mathcal{L}_a$ ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t} \quad \text{und} \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}\,.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist!

c) Zeigen Sie, daß die Hyperbel $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ nicht als Bild eines (endlichen oder unendlichen) Intervalls unter einer stetigen Abbildung dargestellt werden kann!

d) Zeigen Sie: $H \cap \mathcal{L}_3 \neq \emptyset$!

e) Zeigen Sie, daß das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^4 + y^4 = 2 \quad \text{und} \quad x^3 + 2xy^2 + 3xy^3 + 5y^5 = 4$$

mindestens eine reelle Lösung hat!

f) Zeigen Sie: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}$ und $\tan(x^2 + y^2) = e^{xy} \cos(\pi x^2)$!

g) Zur stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gebe es im Intervall $[a, b]$ einen Punkt c mit $f(c) < a$ und einen Punkt d mit $f(d) > b$. Zeigen Sie, daß es mindestens ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, so ist die Folge der Paare (x_n, x_{n+1}) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^2$.

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^p$, und $K \subset \mathbb{R}^p$ sei eine kompakte Teilmenge, die alle x_n enthalte. Weiter sei $f\colon D \to \mathbb{R}^q$ eine stetige Abbildung und $K \subseteq D$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^q$ eine Cauchy-Folge ist!

j) Zeigen Sie, daß man bei der vorigen Aufgabe nicht auf die Kompaktheit von K verzichten kann!

k) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, x_1 eine reelle Zahl, und durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geq 2$ sei rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie: Konvergiert diese Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$, so ist x ein Fixpunkt von f!

l) Zeigen Sie: Für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \sin x_{n-1}$ für $n \geq 2$ gegen Null!

m) Finden Sie alle Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^2 + c$, und entscheiden Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ diese stabil sind!