Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. April 2010

a) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind
$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge 0\}$
abgeschlossene Mengen und
$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$
offen.

Lösung: Eine Funktion f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Hier ist D das Urbild unter f der offenen Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, E das von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und F das von $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; also sind alle drei Mengen offen. Somit sind die Komplemente $A = \mathbb{R}^n \setminus F$, $B = \mathbb{R}^n \setminus E$ und $C = \mathbb{R}^n \setminus D$ abgeschlossen.

b) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \le 5\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 5\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 < 5\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \ge 5\}$,
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \ne 5\}$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 > 5\}$,
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \le 5\}$, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 5\}$,
$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 < 5\}$, $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \ge 5\}$,
$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \ne 5\}$, $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 > 5\}$

Lösung: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Nach der vorigen Aufgabe sind die Mengen A, B, D, G, H und J abgeschlossen; der Rest ist offen. Da keine dieser Mengen leer oder ganz $\mathbb{R}^n$ ist, kann sie dann nicht abgeschlossen sein: Wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, sind $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. (Man kann natürlich auch direkt zeigen, daß die Komplemente der betrachteten Mengen nicht offen sind.) Die Mengen C, E, F, I, K und L sind daher nicht kompakt.

Bei den restlichen Mengen müssen wir noch untersuchen, ob sie auch beschränkt sind. Bei A ist dies der Fall, denn ist $x^2 + 3y^2 \le 5$, so muß $|x| \le \sqrt{5}$ und $|y| \le \sqrt{5/3}$ sein, also $\|(x,y)\|_\infty \le \sqrt{5}$. Da B in A liegt, ist damit auch B beschränkt; A und B sind also kompakt.

D ist offensichtlich nicht beschränkt: Für jedes $x \ge \sqrt{5}$ ist $(x,0) \in D$. Somit ist D nicht kompakt.

Auch H ist nicht beschränkt, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $\left(\sqrt{5+3y^2}, y\right)$ in H. Da H sowohl in G als auch in J liegt, sind auch diese Mengen nicht beschränkt. Somit sind A und B die einzigen kompakten unter diesen zwölf Mengen.

c) Finden Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 \le 5$!

Lösung: $\nabla f(x,y) = \binom{3x^2}{3y^2}$ ist nur für $x = y = 0$ der Nullvektor; in diesem Punkt haben wir offensichtlich weder ein Minimum noch ein Maximum. Da $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \le 5\}$ kompakt ist, muß f dort sowohl sein Minimum als auch sein Maximum annehmen; da in einem inneren Punkt ∇f verschwinden müßte, kann das nur auf dem Rand passieren. In den Extrema ist also $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ und nach Lagrange gibt es dort jeweils ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\nabla f = \lambda \nabla g$ ist, also

$$\begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, ist jeweils eine der beiden Gleichungen erfüllt; die nicht verschwindende Variable kann über die Nebenbedingung bestimmt werden: Ist $x = 0$ muß $y = \pm\sqrt{5/2}$ sein, für $y = 0$ entsprechend $x = \pm\sqrt{5}$. Als Funktionswerte erhalten wir

$$f\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \pm\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2} \quad \text{und} \quad f(\pm\sqrt{5}, 0) = \pm 5^{3/2}\,.$$

Wenn weder x noch y verschwinden, können wir in obiger Gleichung durch x und y kürzen und erhalten die neuen Gleichungen

$$3x = 2\lambda \quad \text{und} \quad 3y = 4\lambda\,.$$

Somit muß $y = 2x$ sein; setzen wir dies in g ein, erhalten wir $x^2 + 2\cdot(2x)^2 = 7x^2 = 5$, d.h. $x = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$ und $y = 2x$. Die Funktionswerte hier sind $f(x, 2x) = x^3 + (2x)^3 = 9x^3$, also ist

$$f(1,2) = 9\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3/2} \quad \text{und} \quad f(-1,-2) = -9\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3/2}\,.$$

Da $5^3 = 125$ größer ist als $9^2 = 81$, ist $5^{3/2}$ größer als neun, also erst recht größer als $f(1,2)$. Somit wird das (absolute) Maximum im Punkt $(0, \sqrt{5})$ angenommen und entsprechend das (absolute) Minimum in $(0, -\sqrt{5})$.

d) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Lösung: *Richtig:* Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen (denn der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen); außerdem ist die Vereinigung zweier beschränkter Mengen beschränkt: Wir können als Schranke für die Normen der Elemente einfach die größere der beiden Schranken zu den Teilmengen nehmen.

e) *Richtig oder falsch:* Die Vereinigung zweier konvexer Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

Lösung: *Falsch:* Die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le 1\}$ sind beide konvex; ihre Vereinigung enthält aber beispielsweise nicht die Verbindungsstrecke der Punkte $(5,0)$ und $(0,5)$

f) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier konvexer Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

Lösung: *Richtig:* Für zwei Punkte x, y aus dem Durchschnitt liegt deren Verbindungsstrecke in jeder der beiden Mengen, also auch im Durchschnitt.

g) Welche der folgenden Eigenschaften hat $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9 \le x^2 + y^2 \le 16\right\}$: kompakt, konvex, wegzusammenhängend, zusammenhängend.

Lösung: X ist offensichtlich beschränkt; die EUKLIDische Norm eines Punktes aus X kann höchstens gleich vier sein. $\mathbb{R}^2 \setminus X$ besteht aus der offenen Kreisscheibe um den Nullpunkt vom Radius eins sowie der offenen Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit EUKLIDischer Norm größer vier, ist also offen; somit ist X abgeschlossen und damit auch kompakt.

X ist nicht konvex: Die Verbindungsstrecke der Punkte $(-4,0)$ und $(4,0)$ geht durch den nicht in X enthaltenen Nullpunkt.

X ist aber wegzusammenhängend, denn X kann auch geschrieben werden als

$$X = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;\middle|\; 3 \le r \le 4 \;\text{ und }\; 0 \le \varphi < 2\pi\right\},$$

und um den Punkt $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in X$ mit $(s\cos\psi, s\sin\psi) \in X$ zu verbinden, können wir zunächst von durch Erniedrigen von r innerhalb von X zu $(3\cos\varphi, 3\sin\varphi)$ gehen, von dort weiter auf dem Kreis mir Radius drei zu $(3\cos\psi, 3\sin\psi)$, und dann durch Erhöhen des Vorfaktors zu $(s\cos\psi, s\sin\psi)$.

Als wegzusammenhängende Menge ist$X$ natürlich auch zusammenhängend.

h) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $X \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, so ist auch das Urbild $f^{-1}(X)$ zusammenhängend.

Lösung: *Falsch:* Ist etwa $f(x,y) = x^2$, so besteht das Urbild des (zusammenhängenden) Intervalls $(1, 4)$ aus den beiden offenen Mengen

$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < x < 2\right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 < x < -1\right\},$$

deren Durchschnitt leer ist.

i) Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche wegzusammenhängend und welche zusammenhängend?

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}, & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, & D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ge 1\}, \\ E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \ne 1\}, & F &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}, \end{aligned}$$

Lösung: A ist als abgeschlossene Kreisscheibe sogar konvex, also insbesondere auch wegzusammenhängend und zusammenhängend; dasselbe gilt für die offene Kreisscheibe C.

B ist die Kreislinie; sie ist natürlich nicht konvex, da die Verbindungsstrecken zweier Punkte Sehnen durch das Kreisinnere sind; sie ist aber wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend.

D ist das Äußere des Kreises zusammen mit der Kreislinie; diese Menge ist zwar nicht konvex, da die Verbindungsstrecke zweier Punkte durch das Innere verlaufen kann; sie ist aber wegzusammenhängend und damit auch zusammenhängend, da es immer eine außerhalb des Kreises verlaufende Verbindungskurve gibt. Dasselbe gilt für das Äußere ohne Kreislinie, also die Menge F.

E schließlich ist als Komplement der Kreislinie die Vereinigung der beiden offenen Mengen C und F; die leeren Durchschnitt haben, von denen aber keine ganz E enthält. Somit ist E nicht zusammenhängend, erst recht also nicht wegzusammenhängend oder gar konvex.

j) Welche der folgenden Mengen sind wegzusammenhängend?

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\}, \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

Lösung: A, B und C sind jeweils Vereinigungen zweier Kreisscheiben vom Radius eins; die erste hat Mittelpunkt (-1.0), die zweite $(1,0)$. Die drei Mengen unterscheiden sich dadurch, daß der Rand, also die Kreislinie, teil dazugehört, teils nicht.

Für sich allein betrachtet ist jede der Kreisscheiben, egal ob mit oder ohne Rand, konvex, also insbesondere wegzusammenhängend; insbesondere kann jeder Punkt durch eine Strecke mit dem Mittelpunkt verbunden werden. Daher sind A, B und C genau dann wegzusammenhängend, wenn ihre Mittelpunkte durch einen Weg miteinander verbunden werden können.

Im Falle von A und C ist das offensichtlich der Fall: Hier liegt sogar die Verbindungs*strecke* der beiden Mittelpunkte ganz in der Menge; A und C sind also wegzusammenhängend. Im Falle von B liegt die Verbindungsstrecke *nicht* in der Menge, da $(0,0) \notin B$. Zumindest anschaulich ist klar, daß es auch keine sonstige ganz in B liegende Verbindungskurve geben kann; formal läßt sich das etwa so beweisen: Angenommen, $\gamma : D \to \mathbb{R}^2$ wäre eine solche Kurve mit $\gamma(0) = (-1,0)$, $\gamma(1) = (1,0)$ und $\gamma(t) \in B$ für alle $t \in [0, 1]$. Wir können γ schreiben als $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ mit zwei stetigen Funktionen $\gamma_1, \gamma_2\colon D \to \mathbb{R}$. Dabei ist $\gamma_1(0) = -1$ und $\gamma_1(1) = 1$; nach dem Zwischenwertsatz gäbe es also ein $t \in (0, 1)$ mit $\gamma_1(t) = 0$. Das ist aber unmöglich, denn B enthält keine Punkte mit x-Koordinate Null.

Bleibt noch die Menge D. Sie ist Vereinigung einer offenen Kreisscheibe mit einer Kreislinie. Auch die Kreislinie ist wegzusammenhängend, denn wir können zwei Punkte einfach durch eines der beiden Bogensegmente dazwischen verbinden. Um den Wegzusammenhang zu zeigen, reicht es daher wieder, einen festen Punkt der Kreisscheibe, z.B. den Mittelpunkt $(-1, 0)$ mit einem festen Punkt der Kreislinie zu verbinden, zum Beispiel dem Punkt $(0, 0)$. Das ist offensichtlich möglich: Die Verbindungsstrecke liegt ganz in D. Somit ist auch D wegzusammenhängend.

k) Ist eine der *nicht* wegzusammenhängenden Mengen aus der vorigen Aufgabe zusammenhängend?

Lösung: Die einzige nicht wegzusammenhängende Menge ist B. Sie ist Vereinigung zweier offener Kreisscheiben mit leerem Durchschnitt, also nicht zusammenhängend.

l) Ist $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \text{ oder } x = 0\}$ wegzusammenhängend?

Lösung: Die Menge besteht aus den zwei Ästen der Hyperbel $xy = 1$ und der y-Achse. Es erscheint schwierig, mit einer Verbindungskurve von einer dieser drei Teilmengen in eine der anderen zu kommen.

Konkret nehmen wir an, es gäbe eine Verbindungskurve $\gamma\colon D \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = (-1, -1)$ und $\gamma(1) = (1, 1)$. Dann Wir schreiben wieder $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$, wobei γ_1 und γ_2 stetige Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ sind. Als stetige Funktion nimmt γ_2 auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ ihr Minimum an; dieses sei m. Da $\gamma_2(0) = -1$ ist, ist $m \leq -1$. γ_1 nimmt auf $[0, 1]$ insbesondere die Werte $\gamma_1(0) = -1$ und $\gamma_1(1) = 1$ an, also nach dem Zwischenwertsatz auch jeden Wert aus $[-1, 1]$, insbesondere den Wert $1/2m$. Ist aber $\gamma_1(t) = 1/2m$, so ist $\gamma_2(t) = 2m$, was wegen $m \leq -1$ kleiner ist als m. Damit haben wir einen Widerspruch gefunden.

m) Ist X zusammenhängend?

Lösung: Auch das ist nicht der Fall: Setzen wir etwa $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy < 1\}$ und $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2xy > 1\}$, so sind U und V nach *a)* offen. Außerdem ist $X \subset U \cup V$, denn es gibt keinen Punkt $(x, y) \in X$, für den $2xy = 1$ wäre. Außerdem ist natürlich $U \cap V = \emptyset$. Da $(1, 1)$ in V liegt, $(0, 0)$ aber in U, liegt X weder ganz in U noch ganz in V, also ist X nicht zusammenhängend.