

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20. April 2010

a) Zeigen Sie: Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so sind

$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq 0\}$
abgeschlossene Mengen und

$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$
offen.

b) Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{array}{ll} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \leq 5\}, & B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 5\}, \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 < 5\}, & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \geq 5\}, \\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \neq 5\}, & F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 > 5\}, \\ G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \leq 5\}, & H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 = 5\}, \\ I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 < 5\}, & J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \geq 5\}, \\ K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 \neq 5\}, & L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3y^2 > 5\} \end{array}$$

c) Finden Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 \leq 5$!

d) *Richtig oder falsch*: Die Vereinigung zweier kompakter Teilmengen von \mathbb{R}^n ist kompakt.

e) *Richtig oder falsch*: Die Vereinigung zweier konvexer Teilmengen von \mathbb{R}^n ist konvex.

f) *Richtig oder falsch*: Der Durchschnitt zweier konvexer Teilmengen von \mathbb{R}^n ist konvex.

g) Welche der folgenden Eigenschaften hat $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$: kompakt, konvex, wegzusammenhängend, zusammenhängend.

h) *Richtig oder falsch*: Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $X \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, so ist auch das Urbild $f^{-1}(X)$ zusammenhängend.

i) Welche der folgenden Mengen sind konvex, welche wegzusammenhängend und welche zusammenhängend?

$$\begin{array}{ll} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, & B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}, \\ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}, & F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}, \end{array}$$

j) Welche der folgenden Mengen sind wegzusammenhängend?

$$\begin{array}{l} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}, \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}, \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \end{array}$$

k) Ist eine der *nicht* wegzusammenhängenden Mengen aus der vorigen Aufgabe zusammenhängend?

l) Ist $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \text{ oder } x = 0\}$ wegzusammenhängend?

m) Ist X zusammenhängend?