Wolfgang K. Seiler | A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13. April 2010

a) Zeigen Sie, daß das folgende lineare Gleichungssystem unlösbar ist:

$$x + y = 1, \quad x + 2y = 2 \quad \text{und} \quad 2x + 3y = 4 \qquad (*)$$

b) Finden Sie reelle Zahlen x, y, so daß $(*)$ mit diesen Zahlen im Sinne der kleinsten Quadrate möglichst wenig falsch ist!

c) Gegeben seien N Datenpaare (x_i, y_i), die ungefähr proportional zueinander sein sollten. Finden sie das im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche $a \in \mathbb{R}$, so daß $y_i \approx ax_i$ ist!

d) Wie können Sie vorgehen, wenn ein Zusammenhang der Form $x_i = A\cos(t_i + \varphi)$ zu erwarten ist?

e) Die Datenpaare (t_i, x_i), $i = 1, \dots, N$ beschreiben den zeitlichen Verlauf einer zu verschiedenen Zeitpunkten t_i gemessenen Größe. Es steht zu erwarten, daß diese Größe einerseits periodischen (z.B. saisonalen) Schwankungen unterworfen ist, andererseits aber im langfristigen Mittel linear ansteigt. Damit bietet sich ein Ansatz der Form

$$x_i \approx a + bt_i + c\sin\omega t_i$$

an, wobei ω eine von der Periode abhängige bekannte Konstante bezeichnet. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die bestmöglichen Schätzwerte a, b und c auf!

f) Beim vorigen Problem war der periodische Anteil zum Zeitpunkt $t = 0$ stets gleich Null; maximal war er unter anderem zum Zeitpunkt $\pi/2\omega$. Wie können Sie vorgehen, wenn Sie nicht wissen, zu welchem Zeitpunkt Sie verschwindende, minimale und maximale Beiträge erwarten sollten?

g) Gegeben seien N Wertepaare (x_i, t_i), wobei theoretisch ein Zusammenhang der Form

$$x_i = a\sin t_i + b\sin 2t_i + c\sin 3t_i + d\sin 4t_i$$

bestehen sollte. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, dessen Lösungen im Sinne der kleinsten Quadrate die beste Schätzung für a, b, c, d liefern!

h) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Datenpaare $(\sin^2 k, \cos^2 k)$, $k = 1, \dots, 100$!

i) Zeigen Sie, daß die offenen Intervalle $(0, \frac{1}{n})$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ eine offene Überdeckung des Intervalls $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ bilden und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

j) Die Menge $\mathfrak{U}$ bestehe aus den offenen Mengen

$$U_{a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x - a)^2 + (y - b)^2 < 1\right\} \quad \text{mit} \quad -1 \le a, b \le 1\,.$$

Zeigen Sie, daß dies eine offene Überdeckung des Rechtecks

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\tfrac{3}{2} \le x, y \le \tfrac{3}{2}\right\}$$

ist und finden Sie eine endliche Teilüberdeckung!

k) Zeigen Sie, daß die offene Kreisscheibe

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 2\right\}$$

nicht kompakt ist!