WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. März 2010

a) Berechnen Sie die Taylor-Polynome zweiten Grades der folgenden Funktionen sowohl via Gradient und HESSE-Matrix als auch auf eine andere Weise::

$$\begin{array}{llll} f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; & (x,y,z) & \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz & \text{um } (1,0,0)\,, \\ f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) & \mapsto \sin x \cos y & \text{um } (0,0)\,, \\ f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) & \mapsto e^{x^2+y^2} & \text{um } (0,0)\,! \end{array}$$

Lösung:

$$\nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+3yz \\ 3y^2+3xz \\ 3z^2+3xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 3z & 3y \\ 3z & 6y & 3x \\ 3y & 3x & 6z \end{pmatrix},$$

also ist

$$\nabla f_1(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_1}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades gleich

$$\begin{aligned} & f_1(1,0,0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h\ j\ k) \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} \\ &= 1 + 3h + \frac{6h^2+3jk+3kj}{2} = 1+3h+3h^2+3jk\,. \end{aligned}$$

Alternativ können wir auch einfach einsetzen:

$$\begin{aligned} f_1(1+h,j,k) &= (1+h)^3 + j^3 + k^3 + 3(1+h)jk \\ &= 1+3h+3h^2+3jk + \text{Terme vom Grad drei}\,. \end{aligned}$$

Also ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von f_1 gleich $1+3h+3h^2+3jk$.
Für f_2 haben wir

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix},$$

im Nullpunkt also $\nabla f_2(0,0) = \binom{1}{0}$ und $H_{f_2}(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Da auch $f(0,0)$ verschwindet, ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades daher einfach gleich x.
Alternativ können wir auch $f_2(x,y) = \sin x \cos y$ über das Produkt der TAYLOR-Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots$$

berechnen; dieses ist

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2} + \text{Terme vom Grad mindestens vier}\,,$$

das TAYLOR-Polynom zweiten Grades besteht also nur aus x.

Für f_3 haben wir $\nabla f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ und

$$H_{f_3}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2} + 4y^2ex^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

also $\nabla f_3(0,0) = \binom{0}{0}$ und $H_{f_3}(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Das TAYLOR-Polynom zweiten Grades ist somit

$$f(0,0) + \frac{1}{2}(x\ y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + x^2 + y^2 .$$

Alternativ können wir $z = x^2 + y^2$ in $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots$ einsetzen; da nur die Summanden 1 und z auf Terme vom Grad höchstens zwei in x und y führen, erhalten wir natürlich auch hier wieder dasselbe Ergebnis.

b) Welche quadratische Form wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ definiert?

Lösung:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2z \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 2xy + 3xz + 2yx + 2yz + 3zx + 2zy + z^2 = x^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 4yz . \end{aligned}$$

c) Durch welche Matrix wird die quadratische Form $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xz$ beschrieben?

Lösung: Ist $A = (a_{ij})$ die zugehörige symmetgrische 3×3-Matrix, so ist

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{21}yx + a_{12}y^2 + a_{23}yz + a_{31}zx + a_{32}zy + a_{33}z^2 \\ &= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz ; \end{aligned}$$

außerdem ist $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i,j.

Wenn dies gleich $x^2 + y^2 + xz$ sein soll, ist daher

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 2 \quad \text{und} \quad a_{13} = a_{31} = \frac{3}{2} ;$$

alle anderen a_{ij} verschwinden. Somit ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

d) Ist diese Matrix positiv oder negativ (semi-)definit?

Lösung: *Nein:* Beispielsweise ist $Q(1,1,0) = 2 > 0$, aber $Q(1,0,-2) = -1 < 0$; die quadratische Form und damit auch die Matrix A sind also indefinit.

e) Entscheiden Sie für die folgenden symmetrischen Matrizen, ob sie positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit sind!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1$ ist positiv und links oben steht die positive Eins; daher ist A positiv definit.

$\det B = 4 - 4 = 0$ und die Spur, d.h. die Summe $1 + 4$ der Diagonalelemente ist positiv; somit ist B zwar nicht positiv definit, aber immerhin positiv semidefinit.

$\det C = 5 - 9 < 0$, also ist C indefinit.

$\det D = -1 - 1 = -2$, also gilt für D dasselbe.

E eingeschränkt auf die zweite und dritte Koordinate ist die 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante $32 - 25 = 7 > 0$; da links oben die positive Vier steht, ist diese Matrix also positiv definit und hat somit zwei positive Eigenwerte. Die Eigenwerte von E sind abgesehen von diesen beiden noch die Drei, also sind alle Eigenwerte von E positiv, und somit ist E positiv definit.

f) Finden Sie für die semidefiniten, aber nicht definiten unter diesen Matrizen einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, den die quadratische Form auf Null abbildet!

Lösung: Nur B erfüllt die Voraussetzung. Hier ist die zweite Spalte das Doppelte der ersten, also ist $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $(2 \;\; -1)B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = 0$.

g) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = x^8 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Wir brauchen den Gradienten und die Hesse-Matrix:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x^7 \\ -4y^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 56x^6 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich verschwindet der Gradient nur im Nullpunkt, und dort ist auch die Hesse-Matrix gleich der Nullmatrix, gibt uns also keine Information. Trotzdem ist klar, daß der Nullpunkt ein Sattelpunkt ist, denn in x-Richtung geht es aufwärts, in y-Richtung abwärts.

h) Berechnen Sie alle Extrema der Funktion $g(x, y) = x^3 - x^2y + y^2x - y^3$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Hier ist

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2xy + y^2 \\ -x^2 + 2xy - 3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & -2x + 2y \\ -2x + 2y & 2x - 6y \end{pmatrix}.$$

Wenn der Gradient verschwindet, verschwindet auch die Summe seiner beiden Komponenten, d.h. $2x^2 - 2y^2 = 2(x + y)(x - y) = 0$ oder $y = \pm x$. Dies führt auf die Gleichung $3x^2 \mp 2x^2 + x^2 = 0$, d.h. $x = y = 0$. Wieder ist die Hesse-Matrix dort gleich der Nullmatrix, und wieder ist klar, daß der Nullpunkt kein Extremum sein kann, denn für benachbarte Punkte mit $x = 0, y > 0$ erhalten wir negative Werte, für solche mit $y = 0, x > 0$ positive.

i) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $h(x, y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Wir haben

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_h(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Wenn der Gradient verschwindet, muß also $\cos x \cos y = \sin x \sin y = 0$ sein.
Der Sinus verschwindet genau bei den ganzzahligen Vielfachen von π, der Kosinus bei den echt halbzahligen. Somit muß eine der beiden Zahlen x, y ein ganzzahliges Vielfaches von π sein, die andere ein echt halbzahliges.
Für $x = k\pi, y = (2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist $\sin x = \cos y = 0$, also

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \cdot (-1)^\ell \\ -(-1)^k \cdot (-1)^\ell & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+\ell+1} \\ (-1)^{k+\ell+1} & \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat Determinante -1, ist also nicht definit. Somit haben wir an dieses Stellen Sattelpunkte.
Für $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, y = \ell\pi$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist $\cos x = \sin y = 0$, also

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & 0 & \\ 0 & -\sin x \cos y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k \cdot (-1)^\ell & 0 \\ 0 & -(-1)^k \cdot (-1)^\ell \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)^{k+\ell+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+\ell+1} \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat Determinante eins, ist also also genau dann positiv definit, wenn der Eintrag links oben positiv ist, und negativ definit, wenn er negativ ist.
Sind also k und ℓ beide gerade oder beide ungerade, so ist die HESSE-Matrix negativ definit, und wir haben ein Maximum; ist eine der beiden Zahlen gerade, die andere ungerade, haben wir ein Minimum.

j) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2|x-y|$!

Lösung: Da die Betragsfunktion an der Stelle Null nicht differenzierbar ist, existiert der Gradient dieser Funktion nur an den Punkten, an denen $|x-y| \neq 0$ ist, also $x \neq y$.
Für $x > y$ stimmt f überein mit der differenzierbaren Funktion $f_1(x,y) = x^2+y^2+2x-2y$ mit

$$\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y-2 \end{pmatrix} .$$

Dieser verschwindet nur für $x = -1$ und $y = 1$, aber in diesem Punkt ist die Bedinung $x > y$ nicht erfüllt. Also gibt es im Bereich $x > y$ keine lokalen Extrema.
Genauso gibt es auch im Bereich $x < y$ keine, denn dort ist

$$f(x,y) = f_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x \quad \text{mit} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+2 \end{pmatrix} .$$

Der Gradient verschwindet somit nur für $x = 1$ und $y = -1$, aber in diesem Punkt ist $x > y$.
Bleiben noch die Punkte mit $x = y$ für diese ist $f(x,y) = x^2+y^2$, und diese Funktion hat als einziges Extremum ein Minimum im Nullpunkt. Dies ist auch das einzige lokale wie auch globale Minimum von f, denn für alle $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2|x-y| > 0$.

k) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2|x-y|$!

Lösung: Da die Betragsfunktion an der Stelle Null nicht differenzierbar ist, existiert der Gradient dieser Funktion nur an den Punkten, an denen $|x-y| \neq 0$ ist, also $x \neq y$.
Für $x > y$ stimmt f überein mit der differenzierbaren Funktion $f_1(x,y) = x^2+y^2-2x+2y$ mit

$$\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+2 \end{pmatrix} .$$

Dieser verschwindet nur für $x = 1$ und $y = -11$. Dort ist $x > y$ und

$$H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit. Somit haben wir in $(1, -1)$ ein lokales Minimum.
Im Bereich $x < y$ ist

$$f(x, y) = f_2(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x \quad \text{mit} \quad \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 2x + 2 \\ 2y - 2 \end{pmatrix} ;$$

der Gradient verschwindet somit nur für $x = -1$ und $y = 1$; in diesem Punkt ist auch $x < y$. Die HESSE-Matrix ist, wie oben, das Doppelte der Einheitsmatrix, also positiv definit. Somit haben wir auch in $(-1, 1)$ ein lokales Minimum.
Bleiben noch die Punkte mit $x = y$ für diese ist $f(x, y) = x^2 + y^2$, und diese Funktion hat als einziges Extremum ein Minimum im Nullpunkt. Sie ist aber kein lokales Extremum von f, denn für $0 < x < \frac{1}{2}$ ist $f(x, 0) = x - 2|x| < 0$, aber $f(x, x) = 2x^2 > 0$.

l) Ein Produkt werde hergestellt mit zwei Ressourcen; beim Einsatz von x Einheiten der ersten und y Einheiten der zweiten können $f(x, y) = 100x^{3/5}y^{2/5}$ Einheiten produziert werden. Die erste Ressource kostet zwölf Euro pro Einheit beim Kauf von weniger als Tausend Einheiten; bei über Tausend Einheiten müssen nur noch zehn Euro pro Einheit bezahlt werden. Für die zweite Ressource sind unabhängig von der Stückzahl zwanzig Euro pro Einheit zu bezahlen. Wie viele Einheiten des Endprodukts können für 16 000 Euro produziert werden?

Lösung: Falls wir mehr als Tausend Einheiten der ersten Ressource verwenden, haben wir die Nebenbedingung

$$g(x, y) = 10x + 20y - 16\,000 = 0 .$$

Da

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 60x^{-2/5}y^{2/5} \\ 40x^{3/5}y^{-3/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

ist, führt uns die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren auf das Gleichungssystem

$$60x^{-2/5}y^{2/5} = 10\lambda \quad \text{und} \quad 40x^{3/5}y^{-3/5} = 20\lambda .$$

Da im Maximum auf jeden Fall $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sein muß, ändert sich nichts an der Lösungsmenge, wenn wir mit $x^{2/5}y^{\frac{3}{5}}$ multiplizieren; kürzen wir zusätzlich die Vorfaktoren, erhalten wir die neuen Gleichungen

$$6y = \lambda \quad \text{und} \quad 2x = \lambda ;$$

somit ist im Optimum $x = 3y$. Setzen wir dies ein in die Nebenbedingung, erhalten wir die Gleichung $30y + 20y = 16\,000$, also ist $y = 320$ und $x = 3y = 960 < 1000$, im Widerspruch zur Annahme.
Wenn wir weniger als Tausend Einheiten der ersten Ressource verwenden, haben wir die Nebenbedingung

$$g(x, y) = 12x + 20y - 16\,000 = 0$$

und kommen auf das Gleichungssystem

$$60x^{-2/5}y^{2/5} = 12\lambda \quad \text{und} \quad 40x^{3/5}y^{-3/5} = 20\lambda .$$

Wieder können wir mit $x^{2/5}y^{\frac{3}{5}}$ multiplizieren und kürzen; jetzt erhalten wir

$$5y = \lambda \quad \text{und} \quad 2x = \lambda ;$$

somit ist im Optimum $2x = 5y$. Setzen wir dies ein in die Nebenbedingung, erhalten wir wieder die Gleichung $30y+20y = 16\,000$, also ist wieder $y = 320$, aber jetzt $x = 2\frac{1}{2}\,y = 800$, was in der Tat kleiner ist als Tausend. Die erzielbare Stückzahl ist

$$f(800, 320) = 100 \cdot 800^{3/5} \cdot 320^{2/5} \approx 55451{,}58748\,.$$

Somit lassen sich 55 451 Stück produzieren.

Da die Nebenbedingung durch eine unstetige Funktion beschrieben wird, müssen wir allerdings auch noch das Verhalten bei der Unstetigkeitsstelle überprüfen. Wenn wir Tausend Einheiten der ersten Ressource kaufen, kosten diese 10 000 Euro; damit bleiben noch 6 000 Euro übrig, mit denen wir 300 Einheiten der zweiten Ressource erwerben können. Die so erreichbare Stückzahl ist

$$f(1000, 300) = 100 \cdot 1000^{3/5} \cdot 300^{2/5} \approx 61780{,}08506\,.$$

Mit dieser Strategie lassen sich also 61 780 Einheiten produzieren, so daß dies unser Optimum ist.

(Punkte der Form (x, y) mit $x > 1000$ und $y < 300$ können keine lokalen Maxima sein, denn da wir in der Umgebung eines solchen Punktes überall die Nebenbedingung $10x + 20y = 16\,000$ haben, müßten dort die beiden Gradienten linear abhängig sein, was nur für $x = 960$ und $y = 320$ der Fall ist.)