Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. März 2010

a) Berechnen Sie die Taylor-Polynome zweiten Grades der folgenden Funktionen sowohl via Gradient und Hesse-Matrix als auch auf eine andere Weise::

$$\begin{array}{llll} f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; & (x,y,z) & \mapsto x^3+y^3+z^3+3xyz & \text{um } (1,0,0)\,, \\ f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) & \mapsto \sin x \cos y & \text{um } (0,0)\,, \\ f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; & (x,y) & \mapsto e^{x^2+y^2} & \text{um } (0,0)\,! \end{array}$$

b) Welche quadratische Form wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ definiert?

c) Durch welche Matrix wird die quadratische Form $Q(x,y,z) = x^2+2y^2+3xz$ beschrieben?

d) Ist diese Matrix positiv oder negativ (semi-)definit?

e) Entscheiden Sie für die folgenden symmetrischen Matrizen, ob sie positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit sind!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

f) Finden Sie für die semidefiniten, aber nicht definiten unter diesen Matrizen einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, den die quadratische Form auf Null abbildet!

g) Berechnen Sie alle Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y) = x^8 - y^4$ auf $\mathbb{R}^2$!

h) Berechnen Sie alle Extrema der Funktion $g(x,y) = x^3 - x^2y + y^2x - y^3$ auf $\mathbb{R}^2$!

i) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $h(x,y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$!

j) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2+2\,|x-y|$!

k) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2-2\,|x-y|$!

l) Ein Produkt werde hergestellt mit zwei Ressourcen; beim Einsatz von x Einheiten der ersten und y Einheiten der zweiten können $f(x,y) = 100x^{3/5}y^{2/5}$ Einheiten produziert werden. Die erste Ressource kostet zwölf Euro pro Einheit beim Kauf von weniger als Tausend Einheiten; bei über Tausend Einheiten müssen nur noch zehn Euro pro Einheit bezahlt werden. Für die zweite Ressource sind unabhängig von der Stückzahl zwanzig Euro pro Einheit zu bezahlen. Wie viele Einheiten des Endprodukts können für 16 000 Euro produziert werden?