Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. März 2010

a) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y)=xy$ auf der Kreislinie $x^2+y^2=1$!

Lösung: Beschreibt $g(x,y)=x^2+y^2-1$ die Kreislinie, so müssen in jedem Extremum die Gradienten von f und von g linear abhängig sein. Hier ist

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} y\\ x\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\end{pmatrix}.$$

Da der Nullpunkt nicht auf der Kreislinie liegt, kann keiner der beiden Gradienten verschwinden; die Gleichung $\binom{y}{x}=\lambda\binom{2x}{2y}$ führt auf

$$x=2\lambda y,\quad y=2\lambda x,\quad \text{also}\quad x=4\lambda^2 x \quad\text{und}\quad y=4\lambda^2 y\,,$$

d.h. $\lambda=\pm\frac12$ und $y=\pm x$. Da der Punkt (x,y) auf der Kreislinie liegt, muß dann $x=\pm\frac12\sqrt2$ und $y=\mp\frac12\sqrt2$ sein. Bei gleichen Vorzeichen erhalten wir das Maximum $\frac12$ von f, bei entgegengesetzten Vorzeichen das Minimum $-\frac12$.

b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z)=xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$!

Lösung: Wir setzen wieder $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ und untersuchen, wann die beiden Gradienten

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Das ist zunächst dann der Fall, wenn einer der beiden Gradienten verschwindet. ∇f verschwindet genau dann, wenn mindestens zwei der drei Variablen x,y,z verschwinden; in diesem Fall verschwindet auch f und wir haben kein Extremum, da f in jeder Umgebung auch sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Aus dem gleichen Grund kann es auch kein Extremum geben, in dem überhaupt eine der drei Variablen verschwindet.

∇g verschwindet nur im Nullpunkt, der nicht auf der Kugeloberfläche liegt.

Somit sind ∇f und ∇g genau dann linear abhängig, wenn es eine reelle Zahl λ gibt, für die $\nabla f=\lambda\nabla g$ ist, also

$$yz=\lambda x,\quad xz=\lambda y \quad\text{und}\quad xy=\lambda z\,.$$

Da keine der Variablen in einem Extremum verschwindet, können wir alle drei Gleichungen nach λ auflösen und anschließend das Ergebnis mit xyz multiplizieren. Wir erhalten

$$\lambda=\frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z} \quad\text{und}\quad y^2z^2=x^2z^2=x^2y^2\,.$$

Wegen $z\neq0$ folgt aus $y^2z^2=x^2z^2$, daß $x^2=y^2$, also $x=\pm y$ ist; genauso folgt aus $x^2z^2=x^2y^2$, daß $z=\pm y$ ist. Wieder haben x,y,z also in den Extrema denselben Betrag;

da (x, y, z) auf der Kugeloberfläche liegt, ist dieser Betrag gleich $1/\sqrt{3}$. Wir haben damit die acht Extrema

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

mit zugehörigem Funktionswert $\pm\frac{1}{9}\sqrt{3}$; sie sind Maxima, wenn es kein Minuszeichen oder genau zwei gibt, und Minima sonst.

c) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

Lösung: Diesmal ist die Nebenbedingung eine Ungleichung, die eine Kreisscheibe beschreibt; wir müssen daher sowohl lokale Extrema im Innern als auch Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ auf dem Rand bestimmen.

In einem lokalen Extremum verschwindet $\nabla f(x, y) = \binom{-2\sin x\cos x}{-2\sin y\cos y}$, d.h. x und y sind ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, was im betrachteten Bereich nur der Nullpunkt erfüllt. Dort ist $\cos^2 x + \cos^2 y = 2$ in der Tat ein sogar absolutes Maximum, denn größer als eins kann das Quadrat eines Kosinus nicht werden. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn auch die Randpunkte können keinen größeren Wert liefern.

Zur Übung wollen wir trotzdem auch die Extrema auf dem Rand bestimmen:

Dort muß ∇f linear abhängig sein von $\nabla g(x, y)$ für $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, also von $\binom{2x}{2y}$. Dieser Gradient verschwindet nirgends auf dem Rand, also gibt es in lokalen Extrama dort reelle Zahlen λ mit

$$-2\sin x\cos x = 2\lambda x \quad \text{und} \quad -2\sin y\cos y = 2\lambda y$$

oder – da $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ – $\sin 2x = -2\lambda x$ und $\sin 2y = -2\lambda y$.

Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist jeweils eine der Gleichungen für beliebiges λ erfüllt, so daß wir λ nach der andern berechnen können; es gibt also vier Kandidaten für Extremwerte, nämlich $(0, \pm 1)$ und (± 10). Der Funktionswert ist dort $\cos^2 1 + 1$.

Falls x und y beide nicht verschschwinden, können wir dividieren und erhalten die Gleichung

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin 2y}{2y}\ .$$

Da $\frac{\sin 2t}{t}$ eine gerade Funktion ist, ist diese Gleichung auf jeden Fall erfüllt für $x = \pm y$; dann sind x, y gleich $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Weitere Lösungen gibt es nicht, denn wie eine Kurvendiskussion zeigt, ist $\frac{\sin 2t}{2t}$ zwischen null und eins monoton fallend: Tatsächlich ist sogar $h(t) = \frac{\sin t}{t}$ im gesamten Intervall $[0, \pi]$ monoton fallend:

Eine Funktion ist monoton fallend, wenn ihre Ableitung im betrachteten Intervall nirgends positiv wird.

$$\dot{h}(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2}$$

hat für $t \neq 0$ dasselbe Vorzeichen wie der Zähler; der verschwindet für $t = 0$ und hat für $t = \pi$ den Wert $-\pi$. Bevor wir ihn durch eine Kurvendiskussion genauer untersuchen, lohnt es sich also, zu schauen, ob vielleicht sogar diese Funktion monoton fällt: Da ihre Ableitung

$$-t\sin t + \cos t - \cos t = -t\sin t$$

in $[0, \pi]$ in der Tat nirgends positiv wird, ist das der Fall. Also ist $\dot{h}(t)$ in $(0, \pi]$ nirgends positiv und, als stetige Funktion, somit auch in $[0, \pi]$. Also ist $h(t)$ dort monoton fallend.

Die Funktionswerte in den vier gefundenen Punkten sind allesamt gleich $2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}$. Um zu entscheiden, ob dies Minima oder Maxima sind, müssen wir mit dem obigen Funktionswert $1 + \cos^2 1$ vergleichen. Das kann jeder Taschenrechner; für Puristen sei aber auch eine Lösung angegeben, die ohne numerische Argumente auskommt:

Da π zwischen drei und vier liegt, ist

$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} > \cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1 > \frac{1}{2},$$

also

$$1\frac{1}{4} < 1 + \cos^2 1 < 1\frac{1}{2}.$$

(Zur Erinnerung: $\frac{\pi}{4}$ entspricht $45°$ und $\frac{\pi}{3}$ ist im Winkelmaß $60°$.)
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ liegt in der Nähe von $\frac{\pi}{4}$, also sollte $\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ungefähr bei $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ liegen, d.h.

$$2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

sollte kleiner sein als $1+\cos^2 1$. Nach der TAYLOR-Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

des Kosinus ist $\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{2^2\cdot 4!} - \frac{1}{2^3\cdot 6!} + \cdots$.
Da der Betrag der Summanden monoton fallend ist, muß jede Summe aus einem negativen und dem darauffolgenden positiven Summanden negativ sein, d.h.

$$\cos\frac{\sqrt{2}}{2} < 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 24} = \frac{4\cdot 24 - 24 + 1}{4\cdot 24} = \frac{73}{96}.$$

Um zu sehen, daß $2\cdot\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} < 1+\cos^2 1$ ist. Diese Behauptung ist äquivalent zu

$$8\cdot 73^2 < 5\cdot 96^2 \quad \text{oder} \quad 2\cdot 73^2 < 5\cdot 48^2 \quad \text{oder} \quad 10658 < 11520,$$

also richtig – ganz in Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten

$2\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}1559436947653744734546479789085896416244472503913053568904102677$
und
$1+\cos^2 1 \approx 1{,}2919265817264288065012158852496189051169996144622275546224250131$.

Damit gibt es in den Punkten $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ auf dem Rand relative Maxima und in den Punkten $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ relative Minima, die gleichzeitig absolute Minima sein müssen.

d) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2+y^2<1$, in denen die Funktion $f(x,y) = \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

Lösung: Der Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x+y)\cos(x+y) + 2\sin(x-y)\cos(x-y) \\ 2\sin(x+y)\cos(x+y) - 2\sin(x-y)\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn

$$\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin(x-y)\cos(x-y) = 0$$

ist. Die Funktion $\sin u \cos u$ verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$, der Gradient ist also genau dann gleich dem Nullvektor, wenn es ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß

$$x + y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x - y = \ell\frac{\pi}{2}$$

ist. An diesen Punkten ist dann

$$f(x,y) = \sin^2 \frac{k\pi}{2} + \cos^2 \frac{\ell\pi}{2}\,.$$

Der erste Summand verschwindet für gerades k und nimmt für ungerades k den Maximalwert eins der Funktion $\sin^2$ an; der zweite verschwindet für ungerades ℓ und nimmt für gerades ℓ seinen Maximalwert an. Somit hat f das absolute Maximum zwei, und dieser Wert wird angenommen für ungerades k und gerades ℓ. Da

$$x = \frac{k+\ell}{4}\pi \quad \text{und} \quad y = \frac{k-\ell}{4}\pi$$

ist, gilt dies genau dann, wenn x und y ungeradzahlige Vielfache von $\pi/4$ sind und sich um ein ganzzahliges Vielfaches von π unterscheiden.

e) Gibt es auch Punkte auf der Kreis*linie* $x^2 + y^2 = 1$, in denen dieser Maximalwert angenommen wird?

Lösung: Falls für einen Punkt (x,y) auf der Kreislinie das absolute Maximum zwei angenommen wird, muß auch dort

$$x + y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x - y = \ell\frac{\pi}{2}$$

sein mit ungeradem k und geradem ℓ. Also ist

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = k\ell\frac{\pi^2}{4}\,,$$

wobei $k\ell$ insbesondere eine gerade Zahl sein muß; x^2-y^2 ist also ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi^2}{2}$, einer Zahl, die wegen $\pi > 3$ größer als $9/2$ ist. Andererseits ist auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ und damit

$$x^2 - y^2 = x^2 + (1 - x^2) = 1 + 2x^2$$

eine reelle Zahl zwischen eins und drei. Somit wird das Maximum auf der Kreis*linie* nirgends angenommen.

f) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = x^2 + 6xy - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 \le 36$!

Lösung: Wieder ist die Nebenbedingung eine Ungleichung. Suchen wir zunächst lokale Extrema im Innern:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 6y \\ 6x - 2y \end{pmatrix} = 0 \iff y = -3x \land x = 3y \iff x = y = 0\,.$$

Da wir $f(x,y)$ auch schreiben können als $(x+3y)^2 - 10y^2$, ist dies kein Extremum: Setzen wir $y = 0$, so ist $f(x,0) = x^2 > f(0,0) = 0$ für alle $x \neq 0$, während $f(0,y) = -y^2 < f(0,0)$ für alle $y \neq 0$. Also gibt es keine lokalen Extrema im Innern.
Auf dem Rand müssen wir mit dem Gradienten von $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 36$ vergleichen; wegen $\nabla g(x,y) = \binom{2x}{8y}$, was nirgends auf dem Rand verschwindet, haben wir also die Bedingungen

$$2x + 6y = 2\lambda x \quad \text{und} \quad 6x - 2y = 8\lambda y\,.$$

Sortieren wir nach x und y, wird dies (nach Kürzen durch zwei) zum linearen Gleichungssystem

$$(1-\lambda)x + 3y = 0 \quad \text{und} \quad 3x - (1+4\lambda)y = 0\,.$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat natürlich die (für uns uninteressante) Nullösung; weitere Lösungen gibt es genau dann, wenn die Determinante

$$-(1-\lambda)(1+4\lambda)-9=4\lambda^2-3\lambda-10=\left(2\lambda-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-10$$

verschwindet, d.h.

$$2\lambda=\frac{3}{4}\pm\sqrt{10+\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{3}{4}\pm\frac{13}{4}$$

muß gleich vier oder $-2\frac{1}{2}$ sein und $\lambda=2$ oder $\lambda=-\frac{5}{4}$.
Für $\lambda=2$ hat

$$-x+3y=0 \quad \text{und} \quad 3x-9y=0$$

die Lösungen $x=3y$; der Fall $\lambda=-\frac{5}{4}$ führt auf

$$\frac{9}{4}x+3y=0 \quad \text{und} \quad 3x+4y=0$$

mit Lösung $x=-\frac{4}{3}y$.
Einsetzen in die Nebenbedingung $x^2+4y^2=36$ ergibt im ersten Fall $13y^2=36$, also $y=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$ und $x=3y=\pm\frac{18}{\sqrt{13}}$; im zweiten Fall erhalten wir $\frac{16}{9}y^2+4y^2=\frac{52}{9}y^2=36$, also $y=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$ und $x=-\frac{4}{3}y=\mp\frac{12}{\sqrt{13}}$.
Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f\left(\pm\frac{18}{\sqrt{13}},\pm\frac{6}{\sqrt{13}}\right)=\frac{18^2+6\cdot 3\cdot 18-6^2}{13}=\frac{612}{13}$$

und

$$f\left(\mp\frac{12}{\sqrt{13}},\pm\frac{9}{\sqrt{13}}\right)=\frac{12^2-6\cdot 9\cdot 12-9^2}{13}=-45$$

Also haben wir im ersten Fall ein Maximum, im zweiten ein Minimum.

g) Beschreiben Sie die Menge $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$ geometrisch!

Lösung: Das ist natürlich eine (Voll-)Ellipse mit Halbachsen 2 und 3.

h) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ in M!

Lösung: $\nabla f=\binom{2x}{2y-2}$ verschwindet nur im Punkt $(0,1)$; schreiben wir

$$f(x,y)=x^2+(y-1)^2+1\,,$$

sehen wir sofort, daß f dort ein lokales Minimum annimmt.
Alle weiteren Extrema müssen auf dem Rand liegen. Der Gradient der Ellipsengleichung ist $\binom{x/2}{2y/9}$; da er nur im Nullpunkt verschwindet, der nicht auf der (Rand)-Ellipse liegt, gibt es für jedes weitere Extremum ein $\lambda\in\mathbb{R}$, so daß

$$2x=\lambda\frac{x}{2} \quad \text{und} \quad 2y-2=2\lambda\frac{y}{9}$$

ist, d.h.

$$(4-\lambda)x=0 \quad \text{und} \quad (9-\lambda)y=9\,.$$

Ist $x = 0$, so ist wegen der Ellipsengleichung $y = \pm 3$ und λ läßt sich aus der zweiten Gleichung bestimmen; andernfalls ist $\lambda = 4$, also $y = 9/5$ und aufgrund der Ellipsengleichung $x = \pm 2/5$. Die Funktionswerte sind jeweils

$$f(0, \pm 3) = 9 \mp 6 = \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases} \quad \text{und} \quad f\left(\frac{9}{5}, \pm\frac{2}{5}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ 7 \end{cases} .$$

Da die zu optimierende Funktion auf dem Rand der Ellipse stetig ist, müssen dort also in $(0, 3)$ und $(9/5, 2/5)$ Minima vorliegen und in den anderen beiden Punkten Maxima.

i) Bestimmen Sie den größten Quader mit achsenparallelen Kanten, der ganz im Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ liegt!

Lösung: Offensichtlich kann man einen Quader mit achsenparallelen Kanten, dessen Ecken *nicht* auf der Oberfläche des Ellipsoids liegen, noch vergrößern; die Ecken des größten liegen also dort. Dann haben sie zwangsläufig die Koordinaten $(\pm x, \pm y, \pm z)$ mit geeigneten positiven reellen Zahlen x, y, z, die die Ellipsoidgleichung erfüllen; das Volumen ist $8xyz$. Somit müssen wir die Funktion $f(x, y, z) = 8xyz$ maximieren unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 .$$

Für die Lösung sind

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$$

proportional, es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$8yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \qquad 8xz = \frac{2\lambda y}{b^2} = \frac{2\lambda z^2}{c^2}$$

ist. Da das Volumen des größten Quaders sicherlich nicht verschwindet, muß auch λ von Null verschieden sein; wir können also, wenn wir nur die rechten drei Terme betrachten, durch 2λ kürzen und erhalten dann wegen der Nebenbedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3} ,$$

aus denen sofort die Lösung

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}b \quad \text{und} \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

folgt.

j) Die Fläche $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung $(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$, wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte von Q, in denen der Abstand zum Punkt $(0, 0)$ ein relatives Minimum annimmt!

Lösung: Gesucht sind Punkte, für die $f(x, y) = x^2 + y^2$ minimal wird unter der Nebenbedingung $(x, y)A\left(\binom{x}{y}\right) = 1$. Mit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ wird letzteres zu

$$g(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2bxy - 1 = 0 .$$

Die Gradienten sind

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax+2by \\ 2cy+2bx \end{pmatrix};$$

da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt, muß es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$ax + by = \lambda x \quad \text{und} \quad cy + bx = \lambda y$$

oder

$$(a-\lambda)x + by = 0 \quad \text{und} \quad bx + (c-\lambda)y = 0\,.$$

Da der Nullpunkt nicht auf der Quadrik liegt; brauchen wir eine nichttriviale Lösung dieses homogenen linearen Gleichungssystems für x, y; diese existiert genau dann, wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, wenn also λ Eigenwert der Matrix A ist.

Falls A zwei gleiche Eigenwerte hat, ist die Quadrik ein Kreis um Null und jeder Punkt ist Lösung; andernfalls gibt es zwei verschiedene Eigenwerte und die gesuchten Lösungspunkte sind unter den Schnittpunkten der Quadrik mit den durch die Eigenräume definierten Geraden. Wie viele der (bis zu vier) Schnittpunkte existieren hängt von A ab; mindestens einer davon ist Lösung des Problems.

k) Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

Lösung: Geometrisch betrachtet handelt es sich um die Schnittpunkte der Quadrik mit ihren Hauptachsen, bei einer Ellipse etwa um die Endpunkte der großen (maximaler Abstand) und der kleinen Halbachse, bei einer Hyperbel um die beiden Scheitelpunkte.

l) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

Lösung: Offensichtlich sind nur nichtnegative Werte für x, y und z sinnvoll. Falls man daher zwei der Variablen festhält, ist

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

monoton in der dritten; da auch die Kostenfunktion

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z$$

diese Eigenschaft hat, wird das Maximum in einem Punkt angenommen, in dem die Kosten das Limit erreichen, d.h. $g(x,y,z) = 24\,000$.

Dort müssen die Gradienten von f und $g - 24\,000$, also

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},$$

linear abhängig sein; da ∇g nirgends verschwindet, muß es somit ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß $\nabla f = \lambda \nabla g$ ist oder

$$\begin{aligned} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 80\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 10\lambda\,. \end{aligned}$$

Durch Kürzen kann man alle rechten Seiten zu λ machen; um Nenner zu vermeiden, ist es allerdings besser, sie zu 12λ zu machen; dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 12\lambda \\ 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 12\lambda\,. \end{aligned}$$

Daher ist $3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} = 12x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}$.
Multiplikation mit $x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ macht daraus $3yz = 10xz = 12xy$.
Da das Maximum der Produktionsfunktion f auf jeden Fall positiv ist, kann dort keine der drei Variablen verschwinden; wir können also unbesorgt kürzen und erhalten die drei Gleichungen

$$3y = 10x, \quad 10z = 12y \quad \text{und} \quad 3z = 12x\,,$$

d.h.

$$z = 4x \quad \text{und} \quad y = \frac{10}{3}x\,.$$

Unter diesen Bedingungen ist

$$g(x,y,z) = 80x + 40x + 40x = 160x\,;$$

dies ist genau dann gleich 24 000, wenn $x = 150$ ist. Damit kennen wir auch

$$y = \frac{10}{3}x = 500, \quad z = 4x = 600\,,$$

und

$$f(x,y,z) = 50 \cdot 150^{\frac{2}{5}} \cdot 500^{\frac{1}{5}} \cdot 600^{\frac{1}{5}} = 50 \cdot \sqrt[5]{150^2 \cdot 500 \cdot 600} = 50\,\sqrt[5]{76750\,000\,000} \approx 4622{,}0087\,.$$

Also lassen sich maximal 4622 Einheiten fertigen.

m) Ab welchem Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt es sich, den Kapitaleinsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir zunächst λ berechnen, z.B. aus der Gleichung

$$12\lambda = 3x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} = 3 \cdot 150^{-3/5} \cdot 500^{1/5} \cdot 600^{1/5} \approx 1{,}8488\,,$$

d.h. $\lambda \approx 0{,}154$. Bei um h erhöhtem Kapitaleinsatz lassen sich also etwa $0{,}154\,h$ zusätzliche Einheiten fertigen; dies lohnt sich, sobald der erzielbare Preis höher liegt als

$$\frac{1}{\lambda} \approx 6{,}49 \text{ Euro}\,.$$

n) Bestimmen Sie die sämtlichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3 + 5y^4\,!$$

Lösung: Die ersten partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 + 4xy^2 + 3y^3 \\ f_y(x,y) &= 4x^2y + 9xy^2 + 20y^3\,. \end{aligned}$$

Davon müssen wir wieder die partiellen Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 12x^2 + 8xy \\
f_{xy}(x,y) &= 8xy + 9y^2 \\
f_{yx}(x,y) &= 8xy + 9y^2 \\
f_{yy}(x,y) &= 4x^2 + 18xy + 60y^2 \,.
\end{aligned}$$

o) Bestimmen Sie die sämtlichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y,z) = \cos(xy + yz + xz) + \sin(x + 2y + 3z)\,!$$

Lösung: Die ersten partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= -(y+z)\sin(xy+yz+xz) + \cos(x+2y+3z) \\
f_y(x,y,z) &= -(x+z)\sin(xy+yz+xz) + 2\cos(x+2y+3z) \\
f_z(x,y,z) &= -(y+x)\sin(xy+yz+xz) + 3\cos(x+2y+3z)\,.
\end{aligned}$$

Davon müssen wir wieder die partiellen Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= -(y+z)^2\cos(xy+yz+xz) - \sin(x+2y+3z) \\
f_{xy}(x,y,z) &= -(x+z)(y+z)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 2\sin(x+2y+3z) \\
f_{xz}(x,y,z) &= -(y+z)(x+y)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 3\sin(x+2y+3z) \\
f_{yx}(x,y,z) &= -(x+z)(y+z)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 2\sin(x+2y+3z) \\
f_{yy}(x,y,z) &= -(x+z)^2\cos(xy+yz+xz) - 4\sin(x+2y+3z) \\
f_{yz}(x,y,z) &= -(x+z)(y+x)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 6\sin(x+2y+3z) \\
f_{zx}(x,y,z) &= -(y+x)(y+z)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 3\sin(xy+yz+xy) \\
f_{zy}(x,y,x) &= -(y+x)(x+y)\cos(xy+yz+xz) - \sin(xy+yz+xz) - 6\sin(x+2y+3z) \\
f_{zz}(x,y,z) &= -(y+x)^2\cos(xy+yz+xz) - 9\sin(x+2y+3z)
\end{aligned}$$

p) $f(x_1,\dots,x_n)$ sei ein homogenes Polynom vom Grad fd in n Variablen, d.h. f ist eine Linearkombination von Monomen $x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$ mit $e_1+\cdots+e_n = d$. Zeigen Sie: Dann ist

$$x_1 f_{x_1}(x_1,\dots,x_n) + \cdots + x_n f_{x_n}(x_1,\dots,x_n) = df(x_1,\dots,x_n)\,!$$

Lösung: Wenn die Formel für zwei homogene Polynome vom Grad d gilt, gilt sie offensichtlich auch für jede Linearkombination der beiden. Daher genügt es, sie für Monome zu beweisen. Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{e_1}\cdots x_i^{e_i}\cdots x_n^{e_n} = e_i \cdot x_1^{e_1}\cdots x_i^{e_i-1}\cdots x_n^{e^n}\,,$$

also ist

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n} = \sum_{i=1}^n e_i x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n} = \left(\sum_{i=1}^n e_i\right) x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n} = dx_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}\,.$$