Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. März 2010

a) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$!

b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

c) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$!

d) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$, in denen die Funktion $f(x,y) = \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

e) Gibt es auch Punkte auf der Kreis*linie* $x^2 + y^2 = 1$, in denen dieser Maximalwert angenommen wird?

f) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion $f(x,y) = x^2 + 6xy - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 \leq 36$!

g) Beschreiben Sie die Menge $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ geometrisch!

h) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ in M!

i) Bestimmen Sie den größten Quader mit achsenparallelen Kanten, der ganz im Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ liegt!

j) Die Fläche $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung $(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$, wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte von Q, in denen der Abstand zum Punkt $(0,0)$ ein relatives Minimum annimmt!

k) Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

l) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

m) Ab welchem Preis, der für eine produzierte Einheit erzielt werden kann, lohnt es sich, den Kapitaleinsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

n) Bestimmen Sie die sämtlichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3 + 5y^4\,!$$

o) Bestimmen Sie die sämtlichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y,z) = \cos(xy + yz + xz) + \sin(x + 2y + 3z)\,!$$

p) $f(x_1, \dots, x_n)$ sei ein homogenes Polynom vom Grad fd in n Variablen, d.h. f ist eine Linearkombination von Monomen $x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ mit $e_1 + \cdots + e_n = d$. Zeigen Sie: Dann ist

$$x_1 f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) + \cdots + x_n f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = d f(x_1, \dots, x_n)\,!$$