

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 9. März 2010

- a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen, und für $h \rightarrow 0$ sei sowohl $f(h) = o(h)$ als auch $g(h) = o(h)$. Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen a, b ist dann auch $af(h) + bg(h) = o(h)$.

Lösung: Da $f(h)$ und $g(h)$ beide $o(h)$ sind, ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0,$$

also ist nach den Rechenregeln für Grenzwerte auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bg(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a \frac{f(h)}{h} + b \frac{g(h)}{h} \right) = a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Somit ist $af(h) + bg(h) = o(h)$, wie behauptet.

- b) Ist dann auch $f(h)g(h) = o(h)$?

Lösung: Ist $g(h) = o(h)$, so ist insbesondere $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, denn sonst könnte der Grenzwert von $g(h)/h$ für $h \rightarrow 0$ gar nicht existieren. Deshalb ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)g(h)}{h} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(h) \right) = 0 \cdot 0 = 0,$$

die Behauptung stimmt also.

- c) Ist sogar $f(h)g(h) = o(h^2)$?

Lösung: Auch das ist richtig, denn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)g(h)}{h^2} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

- d) Angenommen, $f(h) = o(h)$ und $g(h) = o(h^2)$. Können Sie daraus eine der beiden Aussagen $f(h) = o(g(h))$ oder $g(h) = o(f(h))$ folgern?

Lösung: Beides ist falsch: Für $f(h) = g(h) = h^3$ etwa ist $f(h) = o(h)$ und $g(h) = o(h^2)$, aber die Aussage $h^3 = o(h^3)$ ist falsch, denn der Quotient $h^3/h^3 = 1$ bleibt auch im Limes $h \rightarrow 0$ gleich eins.

- e) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion zweier Veränderlicher, und $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlicher. Zeigen Sie: Die Ableitung der Funktion $F(f(x), g(y))$ ist $\left(F_x(f(x), g(y)) \cdot f'(x) \right) \left(F_y(f(x), g(y)) \cdot g'(y) \right) !$

Lösung: Da F eine differenzierbare Funktion ist, gilt für kleine $h, k \in \mathbb{R}$

$$F(u + h, v + k) = F(u, v) + F_x(u, v)h + F_y(u, v)k + o(\max(h, k)).$$

Genauso gilt wegen der Differenzierbarkeit von f und g für kleine Werte p, q , daß

$$f(x+p) = f(x) + f'(x)p + o(p) \quad \text{und} \quad g(y+q) = g(y) + g'(y)q + o(q).$$

Setzen wir $u = f(x)$, $h = f'(x)p + o(p)$, $v = g(y)$ und $k = g'(y)q + o(q)$ in die erste Gleichung ein, erhalten wir die neue Gleichung

$$\begin{aligned} F(f(x+p), g(y+q)) &= F(f(x) + f'(x)p + o(p), g(y) + g'(y)q + o(q)) \\ &= F(f(x), g(y)) + F_x(f(x), g(x))(f'(x)p + o(p)) \\ &\quad + F_y(f(x), g(x))(g'(y)q + o(q)) \\ &\quad + o(\max(f'(x)p + o(p), g'(y)q + o(q))) \\ &= F(f(x), g(y)) + F_x(f(x), g(x))f'(x)p + F_y(f(x), g(x))g'(y)q \\ &\quad + F_x(f(x), g(x))o(p) + F_y(f(x), g(x))o(q) \\ &\quad + o(\max(f'(x)p + o(p), g'(y)q + o(q))). \end{aligned}$$

Da F_x und F_y stetig sind, sind sie insbesondere beschränkt in der Umgebung des Punktes $(f(x), g(x))$, also sind ihre Produkte mit einer Funktion der Form $o(p)$ bzw. $o(q)$ immer noch $o(p)$ bzw. $o(q)$. Genauso sind auch $f(x)$ und $g(y)$ beschränkt in der Umgebung von x bzw. y , so daß wir auch den letzten Summanden als $o(\max(p, q))$ abschätzen können. Daher ist $F(f(x+p), g(y+q))$

$$= F(f(x), g(y)) + F_x(f(x), g(y))f'(x)p + F_y(f(x), g(y))g'(y)q + o(\max(p, q)),$$

die Ableitung also $\begin{pmatrix} F_x(f(x), g(y))f'(x)p \\ F_y(f(x), g(y))g'(y)q \end{pmatrix}$, wie behauptet.

f) Welche Ableitung hat $F(f(x) + g(y), f(x) - g(y))$?

Lösung: Hier ist entsprechend

$$\begin{aligned} &F(f(x+p) + g(y+q), f(x+p) - g(y+q)) \\ &= F(f(x) + f'(x)p + o(p) + g'(y)q + o(q), f(x) + f'(x)p + o(p) - g(y) - g'(y)q + o(q)) \\ &= F(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) + F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y))(f'(x)p + g'(y)q + o(p) + o(q)) \\ &\quad + F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y))(f'(x)p - g'(y)q + o(p) + o(q)) \\ &\quad + o(\max(f'(x)p + g'(y)q + o(p) + o(q), f'(x)p - g'(y)q + o(p) + o(q))) \\ &= F(f(x)+g(y), f(x)-g(y)) + \left(F_x(f(x)+g(y), f(x)-g(y)) + F_y(f(x)+g(y), f(x)-g(y)) \right) f'(x)p \\ &\quad + \left(F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) - F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \right) g'(y)q + o(\max(p, q)), \end{aligned}$$

also ist die Ableitung

$$\begin{pmatrix} \left(F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) + F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \right) f'(x) \\ \left(F_x(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) - F_y(f(x) + g(y), f(x) - g(y)) \right) g'(y) \end{pmatrix}.$$

g) Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^5}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = 0 \end{cases}$$

differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

Lösung: Wenn wir zeigen können, daß sowohl f als auch die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0, 0)$ stetig sind, folgt die Differenzierbarkeit von f .

Zum Nachweis der Stetigkeit gehen wir aus von einem $\varepsilon > 0$ und betrachten einen Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$. Für $x = 0$ ist $f(x, y) = 0$, also $|f(x, y) - f(0, 0)| = 0 < \varepsilon$. Andernfalls ist

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{(xy)^5}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^3 y^5}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right| \leq |x^3 y^5|.$$

Ist $\delta = \sqrt[8]{\varepsilon}$, ist dies für $\max(|x|, |y|) < \delta$ kleiner als $\delta^5 \cdot \delta^3 = \delta^8 = \varepsilon$; die Funktion ist also stetig in $(0, 0)$.

Die partielle Ableitung nach x ist in einem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f_x(x, y) = \frac{5(x^2 + y^2)x^4 y^5 - 2x^6 y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^6 y^5 + 5x^4 y^7}{(x^2 + y^2)^2};$$

im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ ist

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Wir gehen wieder aus von einem $\varepsilon > 0$ und betrachten einen Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$. Falls x verschwindet, ist $f_x(x, y) = 0$, also $|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| = 0 < \varepsilon$. Andernfalls ist

$$|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| = \left| \frac{3x^6 y^5 + 5x^4 y^7}{(x^2 + y^2)^2} \right| = \left| \frac{3x^2 y^5 + 5y^7}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} \right| \leq |3x^2 y^5 + 5y^7|.$$

Für $\max(x, y) < \delta = \sqrt[8]{\varepsilon/8}$ folgt wie oben, daß dies kleiner ist als ε .

Völlig entsprechend argumentiert man für f_y , wo abgesehen von der Vertauschung der beiden Variablen alles wörtlich übernommen werden kann.

Damit ist die Differenzierbarkeit von f in $(0, 0)$ bewiesen.

- h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Wann läßt sich die Gleichung $y = f(x)$ um den Punkt (x_0, y_0) nach x auflösen? Welche Ableitung hat dann die entsprechende Funktion $x = g(y)$ im Punkt y_0 ?

Lösung: Wir müssen die Gleichung $F(x, y) = f(x) - y$ nach x auflösen. Nach dem Satz über implizite Funktionen funktioniert das in jedem Punkt (x_0, y_0) , in dem erstens $F(x_0, y_0)$ verschwindet, d.h. $y_0 = f(x_0)$, und zweitens die Ableitung $F_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ nicht verschwindet.

- i) In welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich die Gleichung $x + \sin xy = y + \cos(x + y)$ nach y auflösen?

Lösung: Zunächst muß $x_0 + \sin x_0 y_0 = y_0 + \cos(x_0 + y_0)$ sein; dann darf die Ableitung von $F(x, y) = x + \sin xy - y - \cos(x + y)$ nach y in diesem Punkt nicht verschwinden, d.h. $x_0 \cos y_0 - 1 + \sin(x_0 + y_0) \neq 0$.

- j) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36!$$

Lösung: In jedem Extremum muß der Gradient gleich dem Nullvektor sein, d.h. die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 9y \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 9x$$

müssen verschwinden. Somit ist $y = -\frac{1}{3}x^2$ und $x = -\frac{1}{3}y^2$, also

$$x = -\frac{1}{9}x^4 \quad \text{oder} \quad x(9 + x^3) = 0.$$

Dies ist einmal erfüllt für $x = 0$. Dann ist auch $y = 0$, wir müssen also den Punkt $(0, 0)$ untersuchen. Da $f(x, 0) = x^3$ beliebig nahe der Null sowohl positive als auch negative Werte annimmt, haben wir hier kein Extremum.

Die zweite Lösung ist $x = -3$. Dann ist $y = -\frac{1}{3} \cdot 3^2 = -3$ und $f(-3, -3) = -9$. In der Umgebung dieses Punktes ist

$$\begin{aligned} f(-3 + h, -3 + k) &= (-3 + h)^3 + (-3 + k)^3 + 9(-3 + h)(-3 + k) - 36 \\ &= -9 - 9(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3. \end{aligned}$$

Für kleine Werte von h und k können wir h^3 und k^3 gegenüber h^2 , hk und $+k^2$ vernachlässigen, und

$$h^2 - hk + k^2 = \left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \quad \text{für alle } (h, k) \neq (0, 0).$$

Somit hat die Funktion bei $(-3, -3)$ ein lokales Maximum.

- k) Am Ufer eines sehr langen und geradlinigen Flusses soll ein rechteckförmiges Grundstück eingezäunt werden, wobei an der Flußseite kein Zaun notwendig ist. Wie groß kann das Grundstück höchstens sein, wenn dafür 100m Zaun zur Verfügung stehen?

Lösung: Der Zaun parallel zum Fluß habe in Metern ausgedrückt die Länge y und befinde sich im Abstand x vom Fluß. Dann ist die Länge des Zauns $y + 2x = 100$, d.h. $y = 100 - 2x$. Die abgetrennte Fläche ist $xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$. Diese Funktion hat die Ableitung $100 - 4x$, also ist im Extremum $x = 25$ und $y = 50$. Das Grundstück hat also höchstens eine Fläche von $25 \times 50 = 1250$ Quadratmeter.