Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 9. März 2010

a) $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen und für $h \to 0$ sei sowohl $f(h) = o(h)$ als auch $g(h) = o(h)$. Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen a, b ist dann auch $af(h) + bg(h) = o(h)$.

b) Ist dann auch $f(h)g(h) = o(h)$?

c) Ist sogar $f(h)g(h) = o(h^2)$?

d) Angenommen, $f(h) = o(h)$ und $g(h) = o(h^2)$. Können Sie daraus eine der beiden Aussagen $f(h) = o\big(g(h)\big)$ oder $g(h) = o\big(f(h)\big)$ folgern?

e) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion zweier Veränderlicher und $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen einer Veränderlicher. Zeigen Sie: Die Ableitung der Funktion $F\big(f(x), g(y)\big)$ ist $\begin{pmatrix} F_x\big(f(x), g(y)\big) \cdot f'(x) \\ F_x\big(f(x), g(y)\big) \cdot g'(y) \end{pmatrix}$!

f) Welche Ableitung hat $F\big(f(x) + g(y),\ f(x) - g(y)\big)$?

g) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^5}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = 0 \end{cases}$$

differenzierbar im Punkt $(0, 0)$?

h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion. Wann läßt sich die Gleichung $y = f(x)$ um den Punkt (x_0, y_0) nach x auflösen? Welche Ableitung hat dann die entsprechende Funktion $x = g(y)$ im Punkt y_0?

i) In welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich die Gleichung $x + \sin xy = y + \cos(x + y)$ nach y auflösen?

j) Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy - 36\,!$$

k) Am Ufer eines sehr langen und geradlinigen Flusses soll ein rechteckförmiges Grundstück eingezäunt werden, wobei an der Flußseite kein Zaun notwendig ist. Wie groß kann das Grundstück höchstens sein, wenn dafür 100m Zaun zur Verfügung stehen?