Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2. März 2010

a) Wo ist die Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ stetig? Wo ist sie differenzierbar?

b) Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß die Funktion
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \Bigl(\dfrac{xy}{e^{2x-3y}}, \sin(x-y)\cos(x+y)\Bigr) \end{cases}$$
stetig ist!

c) *ditto* für
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \Bigl(x + ye^x, \sin^2 y\Bigr) \end{cases} \quad !$$
stetig ist!

d) Bestimmen Sie für die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ und ein offenes Intervall (a, b) das Urbild $f^{-1}\bigl((a, b)\bigr)$! Wann ist es die leere Menge?

e) Was sind die Urbilder der einelementigen Mengen $\{a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$?

f) Zeigen Sie: Für $h \to 0$ ist $\cos h - 1 = o(h)$!

g) *Richtig oder falsch:* Für ein Polynom $f(x)$ vom Grad n ist $f(x) = O(x^n)$. für $x \to 0$.

h) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach x, y und z, und bestimmen Sie den Gradienten überall dort, wo er existiert!

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x + xyz$

$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot \cos(xy)$ $\qquad h(x,y,z) = \frac{x+y}{x-z}$

$k(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad \ell(x,y,z) = ax + by + cz + d$

i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m) \quad \text{mit} \quad y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \end{cases}$$
mit festen reellen Zahlen a_{ij}, b_i!

j) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \bigl(x + y\cos(xy), x^2y^3 + \sin(x^2y^3)\bigr)\,! \end{cases}$$

k) Zeigen Sie: Sind $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so ist auch ihr Produkt $f \cdot g$ differenzierbar und
$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f\,!$$

l) Zeigen Sie: Sind $f\colon D \to R^m$ und $g\colon E \to \mathbb{R}^p$ differenzierbare Abbildungen auf den offenen Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(D) \subseteq E$, so ist auf die Hintereinanderausführung $g \circ f$ differenzierbar mit Jacobi-Matrix $J_g\bigl(f(x)\bigr)J_f(x)$!