WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Februar 2010

a) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

Lösung: Es ist ein Kegel um die z-Achse mit Spitze im Punkt $(0,0,5)$. Der Radius r wird auf der Höhe $5-r$ erreicht, der Öffnungswinkel ist also $45°$.

b) Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine zur (x,y)-Ebene parallele Ebene des $\mathbb{R}^3$. Was können Sie über f sagen?

Lösung: Eine zur (x,y)-Ebene parallele Ebene des $\mathbb{R}^3$ wird durch eine Gleichung der Form $z = a$ beschrieben; die Funktion f ist also konstant (mit Funktionswert a).

c) Welche Koordinatenachsen kann der Graph Γ_f einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ enthalten?

Lösung: Mit x- und y-Achse gibt es offensichtlich keine Probleme; der Graph der Nullfunkition $f(x,y) \equiv 0$ enthält sogar beide. Die z-Achse dagegen kann nie im Graphen enthalten sein, denn wegen $z = f(x,y)$ ist die z-Koordinate eines jeden Punktes eindeutig bestimmt durch die x- und y-Koordinaten.

d) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_f(a)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2+y^2$ für alle $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Für positive Werte von a ist $N_f(x) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = a\right\}$ der Kreis mit Radius $\sqrt{a}$ um den Nullpunkt; für $a = 0$ besteht $N_f(0)$ nur aus dem Nullpunkt, und für negative$+a$ ist $N_f(a)$ die leere Menge.

e) Was ändert sich, wenn wir stattdessen die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ betrachten?

Lösung: Nun ist $N_f(a)$ für $a > 0$ der Kreis mit Radius a; für $a < 0$ ändert sich nichts. Die *Menge aller Niveaumengen* ist also dieselbe wie bei der obigen Funktion, jedoch gehören die Mengen jeweils zu verschiedenen Funktionswerten.

f) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen vom Nullpunkt selbst allesamt Kreise um den Nullpunkt sind ?

Lösung: Da eine Funktion auf ihren Niveaumengen konstant ist, kann der Funktionswert $f(x,y)$ dann nur von x^2+y^2 abhängen; es gibt also eine Funktion $g(z)$ einer Veränderlichen, so daß $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ ist.

g) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2 \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|\,, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x|+|y|\,,$$
$$\|(x,y)\|_4 = \max\{x,y\}, \qquad \|(x,y)\|_5 = \max\bigl\{2\,|x|\,,3\,|y|\bigr\}, \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$$

Lösung: $\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2$ definiert keine Norm, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda(x,y)\|_1 = \lambda^2\,\|(x,y)\|_1 \neq |\lambda|\,\|(x,y)\|_1 \;.$$

$\|(x, y)\|_2 = |x + y|$ definiert keine Norm, denn beispielsweise ist $\|1, -1\|_2 = |1 - 1| = 0$, obwohl $(1, -1)$ nicht der Nullpunkt ist.

$\|(x, y)\|_3 = |x| + |y|$ ist eine Norm: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda(x, y)\| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda| \left(|x| + |y|\right) = |\lambda| \, \|(x, y)\|_3 ,$$

die Summe zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn $x = y = 0$ ist, und für einen weiteren Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (u, v)\|_3 &= \|(x + u, y + v)\|_3 = |x + u| + |y + v| \\ &\le |x| + |u| + |y| + |v| = \|(x, y)\|_3 + \|(u, v)\|_3 . \end{aligned}$$

$\|(x, y)\|_4 = \max\{x, y\}$ ist keine Norm, da beispielsweise $\|(-1, -2)\| = -1$ negativ ist.

$\|(x, y)\|_5 = \max\big\{2|x|, 3|y|\big\}$ ist eine Norm: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\|\lambda(x, y)\| = \max\big\{2|\lambda x|, 3|\lambda y|\big\} = |\lambda| \max\big\{2|x|, 3|y|\big\} = |\lambda| \, \|(x, y)\|_5 ,$$

das Maximum von positiven Vielfachen zweier Beträge ist nie negativ und verschwindet genau dann, wenn $x = y = 0$ ist, und für einen weiteren Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{gathered} \|(x, y) + (u, v)\|_5 = \|(x + u, y + v)\|_5 = \max\big\{2|x + u|, 3|y + v|\big\} \\ \le \max\big\{2(|x| + |u|), 3(|y| + |v|)\big\} \le \max\big\{2|x|, 3|y|\big\} + \max\big\{2|u|, 3|v|\big\} , \end{gathered}$$

denn

$$2(|x| + |u|) \le \max\big\{2|x|, 3|y|\big\} + \max\big\{2|u|, 3|v|\big\}$$

und

$$3(|y| + |v|) \le \max\big\{2|x|, 3|y|\big\} + \max\big\{2|u|, 3|v|\big\} .$$

$\|(x, y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$ dagegen ist wieder keine Norm, denn beispielsweise verschwindet $\|(1, 0)\|_6$.

h) Zeigen Sie, daß die Normen unter den obigen Vorschriften äquivalent zur Maximumsnorm sind!

Lösung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \max\{|x|, |y|\} &\le \|(x, y)\|_3 = |x| + |y| \le 2\max\{|x|, |y|\} \qquad \text{und} \\ \max\{|x|, |y|\} &\le \|(x, y)\|_5 = \max\big\{2|x|, 3|y|\big\} \le 3\max\{|x|, |y|\} . \end{aligned}$$

i) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$\begin{gathered} M_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 < x, y < 2\big\}, \qquad M_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x, y < 2\big\}, \\ M_3 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x, y \le 2\big\}, \\ M_4 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy = 0\big\}, \qquad M_5 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| xy \ne 0\big\} \end{gathered}$$

Lösung: M_1 ist offen, denn bezeichnet ε für $(x, y) \in M_1$ das Minimum der vier Zahlen $x, y, 2 - x$ un d $2 - y$, so liegt der Kreis mit Radius ε um (x, y) ganz in M_1. Dagegen ist M_1 nicht abgeschlossen, da beispielsweise der Randpunkt $(0, 0)$ nicht in M_1 liegt.

M_2 ist nicht offen, da $(0, 0)$ kein innerer Punkt ist, und nicht abgeschlossen, weil der Randpunkt $(2, 2)$ nicht in M_2 liegt.

M_3 ist nicht offen, da $(0, 0)$ kein innerer Punkt ist. Dagegen ist M_3 abgeschlossen, denn M_3 enthält alle seine Randpunkte.

M_4 ist abgeschlossen: Ist nämlich $(x, y) \notin M_4$, so sind x und y beide von Null verschieden; bezeichnet ε das Minimum von $|x|$ und $|y|$, so liegt der Kreis um (x, y) mit Radius ε ganz außerhalb von M_4; das Komplement ist also offen.

M_5 ist das Komplement von M_4, also – wie wir gerade gesehen haben – offen.

j) Zeigen Sie: Die Vereinigung zweier offener Mengen aus $\mathbb{R}^n$ ist offen.

Lösung: U, V seien die beiden offenen Mengen und $x \in U \cup V$ sei ein Punkt aus ihrer Vereinigung. Falls er in U liegt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ in U und damit erst recht in $U \cup V$ liegen. Andernfalls muß x in V liegen und es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ in V und damit erst recht in $U \cup V$ liegen. In jedem Fall gibt es also ein $\varepsilon > 0$, so daß alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ in $U \cup V$ liegen, womit die Offenheit dieser Menge gezeigt wäre.

k) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen aus $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Lösung: Nach Definition ist eine Menge abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Für zwei abgeschlossene Mengen $W, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ sind daher die Mengen $U = \mathbb{R}^n \setminus W$ und $V = \mathbb{R}^n \setminus Z$ offen; wir müssen zeigen, daß auch $\mathbb{R}^n \setminus (W \cap Z)$ offen ist. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liegt genau dann *nicht* in $W \cap Z$, wenn er in mindestens einer der beiden Mengen W, Z nicht enthalten ist, wenn er also in mindestens einem der beiden Komplemente U, V liegt. Dies ist genau dann der Fall, wenn er in deren Vereinigung $U \cap V$ liegt. Diese ist, wie wir in der vorigen Aufgabe gesehen haben, offen; somit ist $\mathbb{R}^n \setminus (W \cap Z) = U \cup V$ offen und damit $W \cap Z$ abgeschlossen.

l) Welche der Punkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \le 2\right\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

Lösung: M ist die Raute mit Eckpunkten $(-2,0)$, $0,2)$, $(2,0)$ und $(0,-2)$. Daher ist $(0,0)$ ein innerer Punkt, denn der Kreis mit Radius 1 im $(0,0)$ liegt ganz in M. Der Punkt $(1,1)$ ist ein Randpunkt, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es im Kreis mit Radius ε um $(1,1)$ sowohl Punkte $(1-\delta,1)$ mit $0 < \delta < \varepsilon$ und $\delta < 1$, die in M liegen, als auch Punkte $(1+\delta,1)$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, die nicht in M liegen.

$(2,2)$ ist ein äußerer Punkt, denn der (offene) Kreis mit Radius eins um diesen Punbkt liegt ganz außerhalb von M. Genauso ist auch $(2,1)$ ein äußerer Punkt; hier liegt zumindest der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ außerhalb M.

$(2,0)$ schließlich ist als Eckpunkt der Raute wieder ein Randpunkt: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegt $(2+\delta,0)$ für alle $0 < \delta < \varepsilon$ außerhalb von M und $(2-\delta,0)$ für alle $0 < \delta < \min\{4,\delta\}$ in M.

m) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n, y_n) aus $\mathbb{R}^2$ sind konvergent für $n \to \infty$, und wohin konvergieren sie?

1) $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$, *2)* $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, *3)* $(x_n, y_n) = \left(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\right)$

Lösung: Wenn wir mit der Maximumsnorm arbeiten, geht es einfach darum, die Konvergenz der beiden Komponenten nachzuweisen. Bei *1)* und *3)* ist das trivial (modulo *Analysis I*): Die Folgen konvergieren gegen $(0,0)$ *bzw.* $(0,1)$. Die zweite Folge dagegen konvergiert zwar in ihrer zweiten Komponente gegen null, die erste dagegen oszilliert ständig zwischen ± 1. Damit ist diese Folge nicht konvergent.

n) Zeigen Sie: Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ ist stetig.

Lösung: Wir arbeiten mit der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$. Dann müssen wir zeigen, daß es zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt: Ist

$$\|(x,y) - (u,v)\|_\infty = \|(x-u, y-v)\|_\infty = \max\left\{|x-u|\,, |y-v|\right\} < \delta\,,$$

so ist $|x-u| < \varepsilon$. Offensichtlich können wir hier einfach $\delta = \varepsilon$ setzen.