Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. Februar 2010

a) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x,y) = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$ geometrisch!

b) Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine zur (x,y)-Ebene parallele Ebene des $\mathbb{R}^3$. Was können Sie über f sagen?

c) Welche Koordinatenachsen kann der Graph Γ_f einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ enthalten?

d) Beschreiben Sie die Niveaumengen $N_f(a)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2+y^2$ für alle $a \in \mathbb{R}$!

e) Was ändert sich, wenn wir stattdessen die Funktion $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ betrachten?

f) Was können Sie über eine Funktion sagen, deren Niveaumengen abgesehen vom Nullpunkt selbst allesamt Kreise um den Nullpunkt sind ?

g) Welche der folgenden Vorschriften definieren Normen auf $\mathbb{R}^2$?

$$\|(x,y)\|_1 = x^2+y^2 \qquad \|(x,y)\|_2 = |x+y|\,, \qquad \|(x,y)\|_3 = |x|+|y|\,,$$
$$\|(x,y)\|_4 = \max\{x,y\}, \qquad \|(x,y)\|_5 = \max\bigl\{2\,|x|\,,3\,|y|\bigr\}, \qquad \|(x,y)\|_6 = \sqrt{|xy|}$$

h) Zeigen Sie, daß die Normen unter den obigen Vorschriften äquivalent zur Maximumsnorm sind!

i) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen?

$$M_1 = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0 < x,y < 2\bigr\}, \qquad M_2 = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x,y < 2\bigr\},$$
$$M_3 = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0 \le x,y \le 2\bigr\},$$
$$M_4 = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| xy = 0\bigr\}, \qquad M_5 = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| xy \ne 0\bigr\}$$

j) Zeigen Sie: Die Vereinigung zweier offener Mengen aus $\mathbb{R}^n$ ist offen.

k) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen aus $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

l) Welche der Punkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$ aus $\mathbb{R}^2$ sind innere Punkte der Menge $M = \bigl\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| |x|+|y| \le 2\bigr\}$, welche sind äußere *bzw.* Randpunkte?

m) Welche der folgenden Punktfolgen (x_n,y_n) aus $\mathbb{R}^2$ sind konvergent für $n\to\infty$, und wohin konvergieren sie?
1) $(x_n,y_n) = \bigl(\frac{1}{1+n^2}, \frac{1}{n^3}\bigr)$, *2)* $(x_n,y_n) = \bigl((-1)^n, \frac{1}{n}\bigr)$, *3)* $(x_n,y_n) = \bigl(e^{-n}, \cos(e^{-n^2})\bigr)$

n) Zeigen Sie: Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$ ist stetig.