Lösung von Aufgabe 3 des dritten Übungsblatts

a) Finden Sie das Maximum der Funktion $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ unter der Nebenbedingung $2x + y = 0$!

Lösung: Die Nebenbedingung ist genau dann erfüllt, wenn $y = 10 - 2x$ ist. Setzten wir dies ein in die Funktion, erhalten wir

$$f(x, 10 - 2x) = x^2 + 4(10 - 2x)^2 .$$

Die Ableitung der rechten Seite nach x ist

$$2x + 8(10 - 2x) \cdot (-2) = 34x - 160 ;$$

sie verschwindet für $x = \frac{80}{17}$. Da dort (wie überall) die zweite Ableitung gleich 34 ist, liegt dort allerdings ein Minimum.

Es gibt somit kein Maximum; für $x \to \infty$ und damit $y \to -\infty$ oder umgekehrt wird die Funktion immer größer.

Verlangt man, wie dies in den Wirtschaftswissenschaften oft stillschweigend der Fall ist, daß $x, y \geq 0$ sein müssen, kann sich x nur im Intervall $[0,\ 10]$ bewegen; an den Randpunkten haben wir die Funktionswerte

$$f(0, 10) = 400 \quad \text{und} \quad f(5, 0) = 25 .$$

Unter diesen *zusätzlichen* Nebenbedingungen liegt das Maximum also bei $(0, 10)$ und hat den Wert 400.

b) Ein quaderförmiger Karton mit quadratischer Grundfläche soll ein Volumen von einem Liter haben. Wie groß ist seine Oberfläche mindestens?

Lösung: Die Grundfläche sei ein Quadrat mit Seitenlänge x und die Höhe sei y. Dann ist das Volumen $x^2 y$; falls wir in Dezimetern rechnen also $y = 1/x^2$. Die Oberfläche ist

$$2x^2 + 4xy = 2x^2 + \frac{4}{x} ;$$

die Ableitung dieser Funktion ist

$$4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} .$$

Dies verschwindet für $x = 1$; dann ist auch $y = 1$, der Quader also ein Würfel mit Kantenlänge ein Dezimeter. Da die zweite Ableitung

$$4 + \frac{8}{x^3}$$

für $x = 1$ positiv ist, haben wir dort tatsächlich ein Minimum; die Oberfläche ist 60 Quadratdezimeter oder 6 000 Quadratzentimeter.