Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. Mai 2010

11. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Eine Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat keine Randpunkte.

2) Richtig oder falsch: Die Menge alle reeller Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist eine Nullmenge.

3) Richtig oder falsch: Die Folge der Funktionen $f_k(x) = \cos^k x$ konvergiert fast überall gegen die Nullfunktion.

4) Richtig oder falsch: Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen $f_k\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ fast überall gegen die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und auch fast überall gegen $g\colon D \to \mathbb{R}$, so ist $f = g$.

5) Richtig oder falsch: Hat $A \subset \mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte, so ist A eine Nullmenge.

Aufgabe 1: *(15 Punkte)*
Die Funktion $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ sei auf $[0, 1)$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{k} & \text{falls } 0 \le x \le \frac{k}{k+1} \\ (k+1)(1-x) & \text{falls } \frac{k}{k+1} < x < 1 \end{cases} ;$$

für $x \in [1, 10]$ sei $f_k(x) = f_k\big(x - [x]\big)$, wobei $[x]$ die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet, und für $x \notin [0, 10]$ sei $f_k(x) = 0$.

a) Zeigen Sie, daß alle f_k Funktionen mit kompaktem Träger sind!

b) Geben Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, gegen die die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ *punktweise* konvergiert!

c) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ ein Cauchy-Folge bezüglich der L^1-Norm auf $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

d) Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ ein Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf $K^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

e) Konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ gleichmäßig gegen f ?

f) Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f$!

g) Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegen die $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast überall konvergiert?

Aufgabe 2: *(ohne Abgabe)*
Zeigen Sie:

a) Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist der Graph $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so ist der Abschluß von $\mathbb{R}^n \setminus A$ der gesamte $\mathbb{R}^n$.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. Mai 2010, um 12.00 Uhr