Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Mai 2010

10. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Zu jeder Funktion $f \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt es ein $x_M \in \mathbb{R}^n$, so daß $f(x_M) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ist.
2) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegt auch das Produkt fg in $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
3) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist der Träger des Produkts fg im Durchschnitt der Träger von f und von g enthalten.
4) *Richtig oder falsch:* Für $f, g \in K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ enthält der Träger des Produkts fg den Durchschnitt der Träger von f und von g.
5) *Richtig oder falsch:* Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat genau dann kompakten Träger, wenn ihr Träger ein endliches Intervall ist.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*
Die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x, y) = \min(1 - |x|, 1 - |y|)$ und $g(x, y) = f(x, y)$, falls $f(x, y) \geq 0$ ist, aber $g(x, y) = 0$ falls $f(x, y) < 0$ ist.

a) Berechnen Sie die Träger der beiden Funktionen und entscheiden Sie, ob diese kompakt sind!
b) Sind f und g stetig?
c) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm1, \pm1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!
d) Was ist $\int_{\mathbb{R}^2} g$?
e) Beschreiben Sie den Graphen von g geometrisch, und geben Sie eine geometrische Interpretation von $\int_{\mathbb{R}^2} g$!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Sind $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = f(x)g(y)$ und $Q = [a, b] \times [c, d]$, so ist $\int_Q h = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(x)\,dx\right)$!
b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = (1 - y^2)\sqrt{1 - x^2}$, und Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm1, \pm1)$. Berechnen Sie $\int_Q f$!

Aufgabe 3: *(ohne Abgabe)*
$0 < a < b$ seien reelle Zahlen, und für $x > 0$ sei $\Gamma_{a,b}(x) \underset{\text{def}}{=} \int_a^b e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

a) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$ ist!
b) Zeigen Sie, daß $\Gamma_{a,b}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist mit $\Gamma_{a,b}^{(n)}(x) = \int_a^b (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 20. Mai 2010, um 12.00 Uhr