Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515 A5, C201

*29. April 2010*

# 9. Übungsblatt Analysis II

**Fragen:** *(je ein Punkt)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\cos x$.

*2)* *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen $\sin x$.

*3)* *Richtig oder falsch:* Die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

*4)* Finden Sie eine Iterationsvorschrift, die mit Hilfe des Newton-Verfahrens Näherungswerte für $\sqrt[n]{a}$ liefert! ($a \in \mathbb{R}$ positiv, $n \geq 2$).

*5)* *Richtig oder falsch:* Wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ gegen $f$ konvergiert, konvergiert sie gleichmäßig gegen $f$.

**Aufgabe 1:** *(9 Punkte)*

*a)* Zeigen Sie: Es gibt genau eine reelle Zahl $x$, so daß der Kosinus des Winkels von $x$ Grad gleich $x$ ist, und berechnen Sie $x$ auf fünf Dezimalstellen!

*b)* Im Banach-Raum $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ sei eine Folge von Funktionen definiert durch $f_0(x) = 1$ und $f_n(x) = 1 - 3\int\limits_0^x t^2 f_{n-1}(t)\,dt$ für $n \geq 1$. Was ist $f_3(x)$?

*c)* Drücken Sie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ durch bekannte Funktionen aus!

*d)* Zeigen Sie, daß $f(x) = 1 - 3\int\limits_0^x t^2 f(t)\,dt$ ist und $f'(x) = -3x^2 f(x)$!

**Aufgabe 2:** *(6 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^3 - 9x$!

*b)* Bestimmen Sie nun näherungsweise mit Hilfe des Newton-Verfahrens drei Lösungen der Gleichung $f(x) = 1$, indem Sie, ausgehend von den drei Nullstellen von $f$, jeweils drei Iterationsschritte durchführen!

**Aufgabe 3:** *(ohne Abgabe)*

Beweisen Sie den folgenden Fixpunktsatz von Weissinger: $V$ sei ein Banach-Raum, $f\colon V \to V$ eine Abbildung, und $q_k \geq 0$ seien reelle Zahlen derart, daß für alle $x_0, y_0$ aus $V$ gilt: Für die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} = f(x_k)$ und $y_{k+1} = f(y_k)$ ist $\|y_k - x_k\| \leq q_k \|y_0 - x_0\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ konvergiert, hat $f$ genau einen Fixpunkt, und die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen diesen Fixpunkt.

*b)* Muß eine Abbildung, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, stetig sein?

**Abgabe** bis zum Donnerstag, dem 6. Mai 2010, um 12.00 Uhr