Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

22. April 2010

8. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Das Bild einer wegzusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist wegzusammenhängend.

2) Richtig oder falsch: Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen eines normierten Vektorraums ist eine CAUCHY-Folge.

3) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge von Elementen des normierten Vektorraums V mit Norm $\|\cdot\|$, so ist $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen.

4) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen des normierten Vektorraums V mit Norm $\|\cdot\|$ und ist $\big(\|x_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge reeller Zahlen, so ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.

5) Richtig oder falsch: Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen von Elementen des normierten Vektorraums V, so ist auch $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Das Polynom $f(x,y) = x^7 + 5x^6y + 4x^5y^2 + 3x^3y^3 + 2xy^5 + y^8$ hat auf der Kreislinie $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ mindestens eine Nullstelle.

b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x,y) = f(\cos x, \sin y)$. Zeigen Sie, daß es einen Punkt $(x,y)\in\mathbb{R}$ gibt mit $0 < x < y < 4$, so daß $g(x,y) = 0$ ist!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $f([a,\ b]) = [a,\ b]$. Zeigen Sie: Dann hat f mindestens einen Fixpunkt in $[a,\ b]$.

b) f sei ein Polynom vom ungeraden Grad $n \geq 3$. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $x\in\mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

c) Gilt dies auch für $n = 1$?

d) $X \subset \mathbb{R}^n$ sei eine kompakte zusammenhängende Menge und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $f(X) = X$. Muß f einen Fixpunkt $x\in X$ haben?

Aufgabe 3: *(ohne Abgabe)*
ℓ_2 sei die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergiert. Zeigen Sie: Mit $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ ist ℓ_2 ein BANACH-Raum.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 29. April 2010, um 12.00 Uhr