Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

15. April 2010

7. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

2) *Richtig oder falsch:* Der Durchschnitt zweier wegzusammenhängender Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.

3) *Richtig oder falsch:* f sei auf $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| < 2\right\}$ differenzierbar, und ∇f sei dort nirgends gleich dem Nullvektor. Dann nimmt f sowohl sein Maximum als auch sein Minimum in $M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\right\}$ auf der Einheitssphäre $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\| = 1\right\}$ an.

4) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $X \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist auch das Urbild $f^{-1}(X)$ kompakt.

5) *Richtig oder falsch:* Ist $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und zusammenhängend, so ist auch $\mathbb{R}^2 \setminus X$ zusammenhängend.

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

a) Welche der folgenden Mengen ist kompakt?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|\,|y| \leq 1\},$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\}, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 \leq 100\}$$

b) Zeigen Sie: Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ kompakt!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von $f(x,y) = 3x^4 + y^4$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 3y^2 \leq 7$!

Aufgabe 3: *(ohne Abgabe)*
Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x \in S$ gibt, so daß für jeden weiteren Punkt $y \in S$ die Verbindungsstrecke von x und y ganz in S liegt.

a) Ist eine sternförmige Menge notwendigerweise konvex? wegzusammenhängend? zusammenhängend? kompakt?

b) Ist eine konvexe/wegzusammenhängende/zusammenhängende/kompakte Menge notwendigerweise sternförmig?

c) Zeigen Sie: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ ist sternförmig!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 22. April 2010, um 12.00 Uhr