Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

11. März 2010

4. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Falls f in einem Punkt x des Würfels $-1 \le x_i \le 1$ für $i = 1, \dots, n$ ein Maximum annimmt, ist dort $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

2) *Richtig oder falsch:* Falls die stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nirgends ein Maximum hat, ist sie unbeschränkt.

3) Konstruieren Sie eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die keine der beiden partiellen Ableitungen überall verschwindet, aber $\nabla f(0,0) = \vec{0}$ ist, ohne daß der Nullpunkt Maximum, Minimum oder Sattelpunkt wäre!

4) *Richtig oder falsch:* Für eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verschwindet f_{xy} genau dann überall, wenn es differenzierbare Funktionen $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x,y) = g(x) + h(y)$ ist.

5) Was können Sie über eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, für die *alle* zweiten partiellen Ableitungen verschwinden?

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 10 Euro, 5 Euro *bzw.* 20 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $40\sqrt{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 50 000 Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 50 000 Euro zu erhöhen?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Berechnen Sie die sämtlichen zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 y \sin(xyz) \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \log(1 + x^2 + y^4 + z^8)\,!$$

Aufgabe 3: *(ohne Abgabe)*

a) Bestimmen Sie die möglichen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Welche Punkte kommen als Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + xy = 4$ in Frage?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 18. März 2010, um 12.00 Uhr