WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. März 2010

3. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen und $f(h) = o\big(g(h)\big)$ für $h \to 0$. Ist $g(h) = o(h)$, so ist auch $f(h) = o(h)$.

2) Richtig oder falsch: Sind $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ist $g(h) = o(h)$ für $h \to 0$, so ist $f\big(x + g(h)\big) = f(x) + o(h)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{y e^{xy}} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ stetig in $(0, 0)$?

4) Richtig oder falsch: Im Punkt (x_0, y_0) verschwinde der Gradient der differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Außerdem habe $f(x_0, y)$ ein lokales Maximum im Punkt $y = y_0$ und $f(x, y_0)$ ein lokales Maxiumum im Punkt $x = x_0$. Dann hat $f(x, y)$ ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

5) Richtig oder falsch: Hat $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0) ein lokales Maximum und ist $g(x_0, y_0) = 0$, so hat f in (x_0, y_0) auch ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar?

b) Wo liegen die lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = x^4 + yx^2 - x^2 - y$?

Aufgabe 7: *(9 Punkte)*

a) Um welche Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ läßt sich die Gleichung $F(x, y) = (x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2 = 0$ nach y auflösen und welche Ableitung hat die dabei entstehende Funktion $y = f(x)$?

b) $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sei ein Polynom n-ten Grades, und x_0 sei eine Nullstelle von f. Zeigen Sie: Falls x_0 keine mehrfache Nullstelle ist, gibt es ein offenes Intervall $(-c,\, c)$ und eine Funktion $\varphi\colon (-c,\, c) \to \mathbb{R}$, so daß $\varphi(0) = x_0$ ist und $p\big(\varphi(y)\big) = y$ für alle $y \in (-c,\, c)$.

Aufgabe 8: *(ohne Abgabe)*

a) Finden Sie das Maximum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ unter der Nebenbedingung $2x + y = 10$!

b) Ein quaderförmiger Karton mit quadratischer Grundfläche soll ein Volumen von einem Liter haben. Wie groß ist seine Oberfläche mindestens?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 11. März 2010, um 12.00 Uhr