WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

25. Februar 2010

2. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf dem Vektorraum V, so ist auch deren Summe eine Norm auf V.

2) Richtig oder falsch: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf dem Vektorraum V, so ist auch deren Differfenz eine Norm auf V.

3) Richtig oder falsch: Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf dem Vektorraum V, so ist auch deren Produkt eine Norm auf V

4) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so auch $\sqrt{f}$.

5) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch $\sqrt{f}$.

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie durch schrittweise Anwendung der Lemmata der Vorlesung, daß die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, e^{\sin(xy)}\right) \end{cases} \qquad \text{stetig ist !}$$

Aufgabe 7: *(10 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$:

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(xy)+\cos(yz)}{1+\cos^2(xyz)} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \frac{\sin(x+y)}{e^{x+z}}\ !$$

b) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y,z) = \big((xy+z)^2, x^2y^3z^4 - x^4y^3z^2\big) \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \big(\cos(x^2+y^2+z^2), e^{\sin(xy)}\big)\ !$$

Aufgabe 8: *(ohne Abgabe)*

a) Zeigen Sie: Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für alle $x,y,u,v \in \mathbb{R}^n$ die *Viereckstungleichung*

$$\big|\|x-y\| - \|u-v\|\big| \le \|x-u\| + \|y-v\|\ !$$

b) U sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß dann auch $U \times V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 4. März 2010, um 12.00 Uhr