Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

18. Februar 2010

1. Übungsblatt Analysis II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Niveaulinien $N_a(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu den Funktionswerten $a \in \mathbb{R}$ seien die Geraden $y = a - x$. Was ist f?

2) Der Graph $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = z\}$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in $\mathbb{R}^2$ und z in $\mathbb{R}$ sei die Fläche, die aus der Parabel $z = 1 - x^2$ durch Rotation um die z-Achse entsteht. Was ist f?

3) *Richtig oder falsch:* Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so auch $2\|\cdot\|$.

4) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

5) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x,x)$ ist stetig.

Aufgabe 6: (*4 Punkte)*

a) Welche der Vorschriften

$$\|(x,y)\|_1 = \min\{|x|, |y|\} \quad \text{und} \quad \|((x,y)\|_2 = \max\{|x+y|, |y|\}$$

definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

b) Zeigen Sie, daß diese Norm äquivalent ist zur Maximumsnorm!

Aufgabe 7: (*8 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.

b) Zeigen Sie: Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

c) Entscheiden Sie, ob die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 100 \text{ und } 3 < x < 5\}$$

offen, abgeschlossen oder keines von beiden ist!

d) Untersuchen Sie für jeden der Punkte $(4,4)$, $(5,5)$ und $(6,6)$, ob es sich um einen inneren, äußeren oder Randpunkt von M handelt!

Aufgabe 8: (*3 Punkte)*

Welche der hier definierten Folgen in $\mathbb{R}^2$ sind konvergent, und wohin konvergieren sie?

a) $\left(\frac{2n+3}{3n-2}, \frac{3n-2}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *b)* $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n, (-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *c)* $\left(e^{1-n^2}, 2 + \sin\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 25. Februar 2010, um 12.00 Uhr