rechts nach links liest, um für eine bekannte Funktion f die unbekannte Stammfunktion F zu berechnen. Als Substitution g wählt man hier eine „geeignete“ bijektive Funktion, die zu einer Vereinfachung auf der linken Seite führt.

1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen: Für $f(x) = 1/x$ und damit $F(x) = \log|x|$ führt die Substitutionsregel

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

zur Integrationsregel

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C\,.$$

Als erste Anwendung betrachten wir

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{g'(x)}{g(x)}$$

mit $g(x) = \cos x$. Nach der gerade bewiesenen Regel ist daher

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos(x)| + C\,,$$

eine Funktion, die genau wie der Tangens selbst an den Nullstellen der Kosinusfunktion nicht definiert ist.

Auch Integrale wie

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

lassen sich nach dieser Regel ausrechnen: Da die Ableitung des Nenners $2x$ ist, folgt

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\log\left|1+x^2\right| + C = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.$$

2) Substitutionen mit linearen Funktionen: Eine der elementarsten Anwendungen der Substitutionsregel, auf die man üblicherweise auch ohne diese Regel kommt, ist die Substitution mit linearen Funktionen $g(x) = ax + b$; hier besagt die Substitutionsregel, daß

$$\int f(ax+b)\cdot a\,dx = F(ax+b) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

ist, oder besser

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)\,.$$

Somit ist beispielsweise

$$\int \sin(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{-\cos(\omega t + \varphi)}{\omega} + C\,.$$

Als etwas umfangreicheres Beispiel wollen wir

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}$$

berechnen. Da wir bislang (außer im Fall $b = c = 0$) noch keine Funktionen kennen, die Ableitungen dieser Form haben könnten, müssen wir unsere bekannten Funktionen durchforsten und schauen, welche auf einen Ausdruck dieser Art führen könnten.

Wenn man die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen kennt, weiß man, daß hier die Umkehrfunktion des Tangens in Frage kommt: Der Tangens ist definiert als Quotient von Sinus und Kosinus und damit an den Nullstellen des Kosinus nicht definiert; wir müssen also alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließen, die sich in der Form $(2k+1)\pi/2$ schreiben lassen mit $k \in \mathbb{Z}$. Nach der Quotientenregel ist

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,,$$

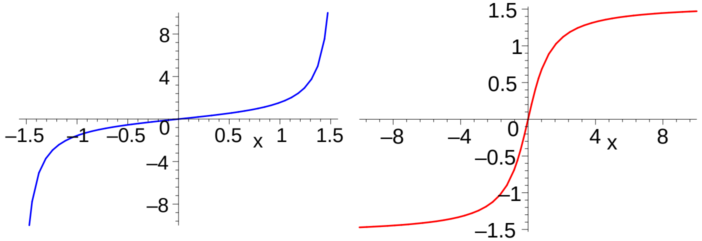
der Tangens ist also in allen Intervallen, in denen er definiert ist, monoton wachsend. Speziell können wir das offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ betrachten. Da Sinus und Kosinus in $(0, \pi/2)$ positiv sind, wächst die Funktion bei linksseitiger Annäherung an $\pi/2$ unbeschränkt; bei rechtsseitiger Annäherung an $-\pi/2$ nimmt sie immer (betrags)größer werdende negative Werte an, denn in $(-\pi/2, 0)$ ist der Sinus negativ, der Kosinus aber positiv. Somit bildet der Tangens das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ monoton steigend ab auf $\mathbb{R}$ und wir haben eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)\,,$$

deren Ableitung im Punkt $y = \tan x$ wir nach der Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion berechnen können:

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Somit ist $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + C\,.$



Tangens und Arkustangens

Durch quadratische Ergänzung können wir versuchen, den Nenner unseres Integranden dieser Form anzunähern:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right) + c - \frac{b^2}{4}\,;$$

setzen wir

$$y = x + \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad d = c - \frac{b^2}{4}$$

ist daher nach der Regel über lineare Substitutionen

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dy}{y^2+d}\,,$$

und damit sind wir schon recht nahe am obigen Integral.

Falls d positiv ist, gibt es ein $a > 0$ mit $d = a^2$ und

$$\int \frac{dy}{y^2+d} = \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \int \frac{\frac{dy}{a^2}}{\left(\frac{y}{a}\right)^2+1}\,.$$

Hierauf können wir die Substutionsregel anwenden mit

$$f(y) = \frac{1/a}{y^2+1}, \quad F(y) = \frac{1}{a}\arctan y \quad \text{und} \quad g(y) = \frac{y}{a}\,;$$

wir erhalten

$$\int \frac{dy}{y^2+d} = \int \frac{\frac{dy}{a}}{\left(\frac{y}{a}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) + C\,.$$

Für negative d können wir $d = -a^2$ schreiben und uns dann entweder ähnlich wie oben überlegen, daß die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ eine Stammfunktion von $1/(x^2-1)$ ist, oder aber wir schreiben

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

und haben dann

$$\int \frac{dy}{y^2+d} = \int \frac{dy}{y^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dy}{y-a} - \int \frac{dy}{y+a}\right)$$
$$= \frac{1}{2a}\bigl(\log(y-a) - \log(y+a)\bigr) + C = \frac{1}{2a}\log\frac{y-a}{y+a} + C\,.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x-1}{x+1}$ (gesprochen *Areatangens hyperbolicus*), so läßt sich dies auch schreiben als $\frac{1}{2a}\operatorname{artanh}\frac{y}{a}$. Somit ist mit $\Delta = b^2 - 4c = -4\Delta$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C & \text{falls } \Delta < 0 \\ \frac{-2}{2x+b} + C & \text{falls } \Delta = 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{artanh}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C & \text{falls } \Delta > 0\,. \end{cases}$$

(Man kann sich leicht überlegen, daß der so definierte Areatangens hyperbolikus tatsächlich eine Umkehrfunktion von $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ ist.)

e) Wie findet man eine Stammfunktion?

Wie das letzte Beispiel zeigt, kann die Suche nach einer Stammfunktion sehr aufwendig sein; während wir die Ableitung einer differenzierbaren Funktion im allgemeinen ohne großes Nachdenken durch schematisches Anwenden einfacher Regeln finden können, müssen wir uns bei der Suche nach einer Stammfunktion immer neue Tricks einfallen lassen, und manchmal kann es auch passieren, daß keiner unserer Ansätze zum

Erfolg führt. Für die Funktionen

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad e^{-x^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$$

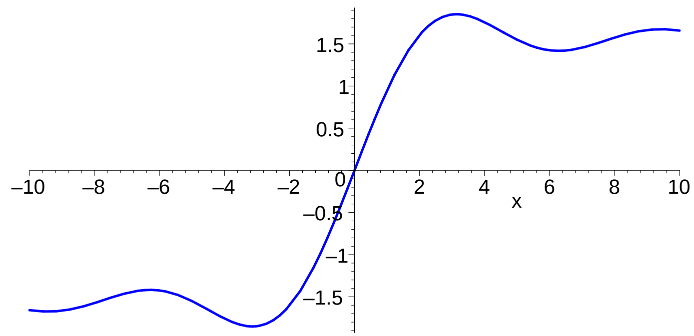
etwa kann man zeigen, daß es keine aus Grundrechenarten, Wurzeln, Exponentialfunktionen, Logarithmen, trigonometrischen und Hyperbelfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen zusammengesetzte Funktion gibt, deren Ableitung eine der genannten Funktionen ist. Trotzdem existieren diese Stammfunktionen natürlich, und sie sind auch wichtig: Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ und ihre Stammfunktion spielen eine wesentliche Rolle zum Beispiel bei der Vermeidung sogenannter *alias*-Effekte sowohl bei Rastergraphiken als auch bei digitalen Audioaufzeichnungen, die Stammfunktion von $\frac{\log x}{x}$ ist eng verbunden mit der Verteilung der Primzahlen, die von e^{-x^2} wird benötigt für die wohl wichtigste Verteilung in der Statistik, die GAUSSsche Normalverteilung, und Intergrale, bei denen im Nenner die Wurzel aus einem kubischen Polynom ohne mehrfache Nullstellen steht, treten z.B. auf bei der Berechnung der Bogenlänge der Ellipse und damit auch bei den GAUSS-KRÜGER-Koordinaten, die sowohl unseren amtlichen topographischen Karten als auch dem Katasterwesen zugrunde liegen. Via RIEMANN-Summen können diese Stammfunktionen auch problemlos numerisch berechnet werden, und mehr können wir mit der Wurzelfunktion oder den trigonometrischen Funktionen auch nicht machen. Daher führt man einfach neue Funktionen ein wie

den *Integralsinus* $\quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi$

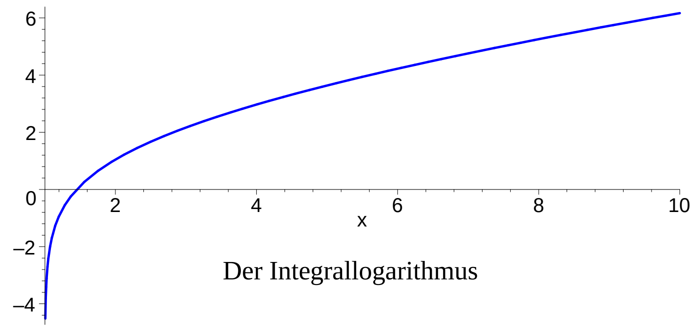
den *Integrallogarithmus* $\quad \operatorname{Li}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\log\xi}$

die *Fehlerfunktion* $\quad \operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi$

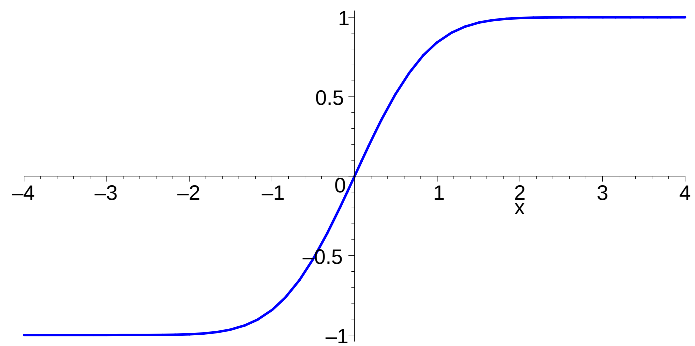
sowie eine ganze Reihe sogenannter *elliptischer Funktionen.* (Der Vorfaktor bei der Fehlerfunktion sorgt dafür, daß $\lim_{x\to\infty} \operatorname{Erf}(x) = 1$ ist; das ist nützlich für Anwendungen in der Statistik.)



Der Integralsinus



Der Integrallogarithmus



Die Fehlerfunktion

Wir können also auch bei harmlos aussehenden Funktionen nicht sicher sein, daß wir ihre Stammfunktion durch bekannte Funktionen ausdrücken können. Schlimmer noch: Wir können das Problem auch nicht immer in Teilprobleme zerlegen. So ist etwa für $f(x) = \log x \cdot \sin x$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\,,$$

also

$$\int \left(\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right)\,dx = \log x \cdot \sin x + C\,.$$

Nach der Linearitätsregel ist auch

$$\int \left(\frac{\sin x}{x} + \log x \cdot \cos x\right)\,dx = \int \frac{\sin x}{x}\,dx + \int \log x \cdot \cos x\,dx\,,$$

aber da das erste Integral rechts auf den nicht elementar ausdrückbaren Integralsinus führt, sind beide Integrale auf der rechten Seite nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar.

Früher sagte man daher häufig, die Differentiation sei ein Handwerk, die Integration aber eine Kunst. In den Sechzigerjahren galt Integration auch als Paradebeispiel für Anwendungen der Künstlichen Intelligenz; wie bei vielen der damals populären KI-Anwendungen gab es jedoch auch hier keine nennenswerten Erfolge.

Wer allerdings eines der gängigen Computeralgebrasysteme nach Stammfunktionen suchen läßt, bekommt im allgemeinen erstaunlich schnell eine Antwort, die zwar gelegentlich für den Laien schwer verständlich ist, in einfachen Fällen aber meist etwas liefert, von dem man sich leicht überzeugen kann, daß es eine Stammfunktion ist. Was hier im Hintergrund abläuft hat nichts mit Künstlicher Intelligenz zu tun, sondern mit dem was Computeralgebrasystemen ihren Namen gegeben hat, mit Algebra also. Ausgehend von Sätzen aus dem neunzehnten Jahrhundert kann man für große Klassen von Funktionen nicht nur eine eventuell existierende elementar darstellbare Stammfunktion konstruieren, sondern gegebenenfalls auch beweisen, daß keine existiert. Die dabei verwendeten Algorithmen aus der Differentialalgebra und die für dem Beweis von deren Korrektheit benötigten Sätze aus der Funktionentheorie liegen deutlich jenseits des Niveaus einer Vorlesung Analysis I und haben insbesondere nichts zu tun mit den vielen Integrationstricks, die man

in Analysis-Lehrbüchern findet. Wegen der Allgegenwart auch freier Computeralgebrasysteme sei deshalb hier auf die Behandlung weiterer solcher Tricks verzichtet. Wer wissen möchte, wie ein Computeralgebrasystem integriert, findet eine Kurzdarstellung zum Beispiel bei

J. H. DAVENPORT, Y. SIRET, E. TOURNIER: Computer algebra: systems and algorithms for algebraic computations, *Academic Press,* ^{2}1993;

für eine ausführliche Darstellung mit Beweisen sei verwiesen auf

MANUEL BRONSTEIN: Symbolic Integration I: Transcendental Functions, *Springer,* ^{2}2005

Der deutlich schwierigere Fall von Integranden mit Wurzelausdrücken wird behandelt in

JAMES HAROLD DAVENPORT: On the integration of algebraic functions, *Lecture notes in computer science* **102**, 1981

f) Uneigentliche Integrale

Sei $a > 0$ und $b > a$. Dann ist für eine reelle Zahl $r \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{x^r} = \left.\frac{-1}{(r-1)x^{r-1}}\right|_a^b = \frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{a^{r-1}} - \frac{1}{b^{r-1}}\right)\,.$$

Falls $r > 1$ ist, können wir hiervon den Grenzwert für b gegen unendlich betrachten und es liegt nahe, diesen als Wert des Integrals von a bis unendlich zu bezeichnen:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{r-1}\frac{1}{a^{r-1}} \quad \text{für} \quad r > 1\,.$$

Auch wenn wir nicht bis unendlich integrieren wollen, gibt es Beispiele von Integralen, denen wir via Grenzwertbetrachtung einen sinnvollen Wert zuordnen können, ohne daß das Integral im Sinne unserer bisherigen Definitionen existieren würde: Beispielsweise ist für $a \le c < b$ und eine relle Zahl $0 < r < 1$

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^r} = \left.\frac{(b-x)^{1-r}}{r-1}\right|_a^c = \frac{(b-a)^{1-r}}{r-1} - \frac{(b-c)^{1-r}}{r-1}\,,$$

und auch hier liegt es nahe, den Grenzwert für $c \to b$ als Wert des Integrals von a bis b zu bezeichnen. Wir müssen hier allerdings vorsichtig sein mit dem Grenzübergang, denn die obige Formel gilt natürlich nur für $c < b$; für $c > b$ ist das Integral undefiniert.

Wir definieren daher für eine Funktion, die in einem halboffenen Intervall $[a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert und dort stückweise stetig ist, das rechtsseitig uneigentliche Integral als

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert; andernfalls sagen wir, das Integral sei *divergent.*

Völlig analog erklären wir linksseitige uneigentliche Integrale: f sei definiert und stückweise stetig auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert; andernfalls sagen wir, das Integral sei *divergent.*

Diese Definitionen sind immer noch nicht allgemein genug: Eine Funktion könnte auch an *beiden* Enden eines Intervalls (a, b) undefiniert sein, wobei wir auch die Sonderfälle $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ zulassen wollen, und zusätzlich könnte sie auch noch Undefiniertheitsstellen $c_1 < \cdots < c_r$ im Intervallinnern haben.

In diesem Fall läßt sich das Intervall so in Teilintervalle zerlegen, daß f in jedem Teilintervall höchstens an *einem* der beiden Intervallenden uneigentlich ist: Falls es keine Undefiniertheitsstellen im Intervallinnern gibt, wählen wir willkürlich ein c_0 zwischen a und b und betrachten die beiden Intervalle $(a, c]$ und $[c, b)$. Im anderen Fall können zwei Zusatzpunkte notwendig sein: ein Punkt c_0 zwischen a und c_1 sowie ein Punkt c_{r+1} zwischen c_r und b.

Wir sagen dann, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiere, wenn

jedes der uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{c_0} f(x)\,dx, \quad \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_{r+1}}^{b} f(x)\,dx$$

konvergiert; die Summe ihrer Werte bezeichnen wir als den Wert des Integrals von a bis b.

Als Beispiel betrachten wir das an beiden Grenzen uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, empfiehlt es sich, das Integrationsintervall, das hier aus ganz $\mathbb{R}$ besteht, bei Null zu unterteilen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{d\to\infty} \int_{0}^{d} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\lim_{c\to-\infty} \arctan c + \lim_{d\to\infty} \arctan d) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,.
\end{aligned}$$

Die Forderung, daß *jedes* der Teilintegrale einzeln konvergieren soll, ist gelegentlich zu restriktiv. Für das bei Null uneigentliche Integral

$$\int_{-2}^{4} \frac{dx}{x^3}$$

könnte man etwa argumentieren, daß der Integrand eine ungerade Funktion ist, so daß aus Symmetriegründen das Integral von -2 bis 2 verschwinden sollte und

$$\int_{-2}^{4} \frac{dx}{x^3} = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3} + \int_{2}^{4} \frac{dx}{x^3} = 0 + \frac{3}{32} = \frac{3}{32}$$

ist. Diese Art der Argumentation ist durch das, was wir bislang gelernt haben, nicht gedeckt, und es gibt auch gute Gründe, sie zu verbieten: Schließlich geht die Stammfunktion $-\frac{1}{2}x^{-2}$ für $x \to 0$ gegen minus unendlich, und wenn eine Größe mit Relevanz in der realen Welt unendlich groß wird, hat dies im Allgemeinen zu gravierende Konsequenzen, als daß man einfach durch diesen Punkt hindurch weitergehen könnte.

Andererseits beschreiben aber in Anwendungen der Mathematik viele Funktionen nur näherungsweise die Größe, die sie darstellen sollen: Mathematische Modelle sind praktisch immer *vereinfachende* Modelle der Wirklichkeit. So gilt beispielsweite das OHMsche Gesetz sicherlich nicht mehr, wenn man einen 5 Ω-Widerstand aus einer auf 5 V Spannung ausgelegten Schaltung im Hochspannungslabor mit 100 kV belastet, und es gilt auch nicht mehr ohne Korrekturterme, wenn man einen Wechselspannung mit 500 MHz anlegt.

Entsprechend gibt es durchaus Situationen, in denen das mathematische Modell einen unendlich großen Wert vorhersagt, wohingegen in der Realität limitierende Faktoren, die für Werte im „üblichen" Größenbereich noch keine nennenswerte Rolle spielen, für eine Begrenzung sorgen. Falls man in einer solchen Situation sicher sein kann, daß auch in der realen Situation noch die Symmetrie zum Nullpunkt erhalten bleibt, kann man so wie oben argumentieren; falls allerdings die Symmetrie *nicht* erhalten bleibt, können durch die Begrenzung der Funktion beliebig große Abweichungen erzeugt werden, über die man mit dem vereinfachten mathematischen Modell nichts aussagen kann.

Da somit alles von der Anwendung abhängt, kann die Mathematik hier nicht mehr bieten als eine *Definition:* Falls für die Funktion f, die auf $[a,c) \cup (c,b]$ definiert ist, der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \int_a^{c-h} f(x)\,dx + \int_{c-h}^{b} f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnen wir ihn als CAUCHYschen Hauptwert von $\int_a^b f(x)\,dx$. Entsprechend reden wir auch in komplizierteren Situationen mit mehreren Unstetigkeitsstellen vom CAUCHYschen Hauptwert, falls sich eine Aufteilung in Teilintervalle finden läßt, so daß für jedes Teilintervall der

CAUCHYsche Hauptwert existiert. Im obigen Beispiel wäre also $\frac{3}{32}$ der CAUCHYsche Hauptwert des Integrals, wohingegen das Integral selbst nicht existiert.

Die Frage, wann der CAUCHYsche Hauptwert für ein divergentes Integral verwendet werden sollte, ist keine mathematische Frage: Unter rein mathematischen Gesichtspunkten gibt es **nie** eine Rechtfertigung für die Verwendung des CAUCHYschen Hauptwerts. Der CAUCHYsche Hauptwert ist nur dann sinnvoll anwendbar, wenn man davon ausgeht, daß ein mathematisches Modell eine Situation nur für nicht zu große Funktionswerte (ungefähr) korrekt beschreibt, und wenn man gleichzeitig sicher ist, daß die Unendlichkeitsstelle des mathematischen Modells für die Anwendung unproblematisch ist und gleichzeitig die Symmetrie, die der Berechnung des CAUCHYschen Hauptwerts zugrundeliegt, auch in der realen Anwendung gilt.

Der CAUCHYsche Hauptwert darf auch *nie* als eine Rechtfertigung dafür verstanden werden, daß man unbesonnen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

setzt, wobei F eine zwar in den Punkten a und b, nicht aber auch für jeden Zwischenwert $a \le x \le b$ definierte Stammfunktion von f ist: So etwas kann zu Ergebnissen wie

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1$$

führen, und natürlich ist keine Anwendung denkbar, in der eine negative Zahl in sinnvoller Weise als Integral über eine überall positive Funktion angesehen werden kann. In der Tat existiert im obigen Beispiel weder das Integral noch dessen CAUCHYscher Hauptwert, da sich die Unendlichkeiten links und rechts der Null hier nicht wegheben, sondern verstärken.

Zu einer etwas systematischeren Untersuchung uneigentlicher Integrale empfiehlt es sich, zunächst die Potenzen zu betrachten. Für positive Exponenten r ist x^r überall definiert, so daß Integrale über einen *endlichen* Bereich unproblematisch sind; für Integrale über einen *unendlichen* Bereich rechnet man leicht nach, daß sie immer divergieren. Für $r = 0$ ändert sich nichts an dieser Situation; interessant ist also nur der Fall $r < 0$, wo sowohl der Wert $x = 0$ als auch unendliche obere und/oder untere Grenzen zu Problemen führen können. Für negatives r ist $x^r = 1/x^{-r}$, wir interessieren uns also für

$$\int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}\Bigg|_a^b \quad \text{für} \quad r > 0, \quad r \neq 1\,.$$

Für $a > 0$ und $b \to \infty$ existiert ein Grenzwert genau dann, wenn $r - 1 > 0$, also $r > 1$ ist; alsdann ist

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}\,.$$

Für $b > 0$ und $a \to \infty$ existiert ein Grenzwert genau dann, wenn $r - 1 < 0$, also $r < 1$ ist; alsdann ist

$$\int_0^b \frac{dx}{x^r} = \lim_{a\to 0} \int_a^b \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{1-r} b^{1-r}\,.$$

Zusammen mit der Monotonieeigenschaft des RIEMANN-Integrals aus §3*a)* ergeben sich hieraus zwei allgemeine Kriterien für die Konvergenz uneigentlicher Integrale:

Satz: Die Funktion f sei stetig für $x \geq a$ und g sei stetig für $0 < x \leq b$. Dann gilt:

1.) Falls es eine reelle Zahl K und eine reelle Zahl $r > 1$ gibt, so daß $|f(x)| \leq \frac{K}{x^r}$ ist, konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

2.) Falls es eine reelle Zahl K und eine reelle Zahl $0 < r < 1$ gibt, so daß $|g(x)| \leq \frac{K}{x^r}$ ist, konvergiert $\int_0^b g(x)\,dx$.

Beweis: 1.) Nach der Monotonieregel ist für jedes $b \geq a$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leq K \int_a^b \frac{dx}{x^r}\,,$$

und letzteres Integral konvergiert, wie wir gerade nachgerechnet haben, unter den angenommenen Voraussetzungen. Das linksstehende Integral ist somit beschränkt durch eine von b unabhängige Konstante; da es wegen der Nichtnegativität des Betrags zusätzlich eine monoton wachsende Funktion von b ist, existiert daher der Grenzwert nach dem bekannten, schon für die Existenz des RIEMANN-Integrals verwendeten Satz, wonach jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergent ist.

Genau dasselbe gilt für die ebenfalls nichtnegative Funktion $f(x)+|f(x)|$, die durch $\frac{2K}{x^r}$ beschränkt ist; also existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^\infty \bigl(f(x) + |f(x)|\bigr)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty |f(x)|\,dx\,,$$

und damit auch das gesuchte Integral als ihre Differenz.

2.) geht völlig analog. ■

Als Beispiel betrachten wir das Integral

$$\Gamma(x) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0\,.$$

Es ist natürlich immer uneigentlich an der oberen Grenze, für $x < 1$ zusätzlich auch noch an der unteren.

Diese untere Grenze ist völlig harmlos, denn für $0 < x < 1$ ist

$$e^{-t}t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \leq \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{mit} \quad 0 < 1 - x < 1\,,$$

so daß obiger Satz sofort die Konvergenz zeigt.

Auch die obere Grenze ist unproblematisch, denn die dazu notwendige Abschätzung

$$e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{K}{t^r} \iff e^t \geq \frac{t^{r+x-1}}{K}$$

folgt, da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz.

Die somit für alle $x > 0$ definierte Funktion $x \mapsto \Gamma(x)$ heißt EULERsche *Gamma-Funktion.* Ihre wichtigste Eigenschaft der folgt durch partielle

Integration:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = e^{-t} \frac{t^x}{x} \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x\, dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

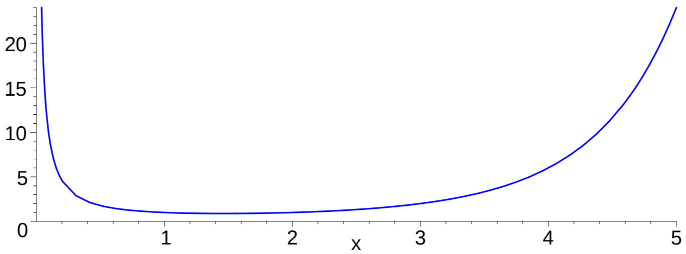
oder $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle reellen $x \geq 0$. Mit dem elementar berechenbaren Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t} \Bigg|_0^\infty = 1$$

führt dies auf die Formel

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,;$$

die Γ-Funktion ist also eine Art stetig gemachter Fakultätsfunktion.



Die Γ-Funktion

GAUSS definierte auf andere Weise eine stetige Funktion $\Pi(x)$, für die $\Pi(n) = n!$ ist, aber wie sich bald herausstellte, ist $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, so daß nur eine der beiden Funktionen wirklich gebraucht wird. Nach einigen Modewechseln im letzten Jahrhundert entscheidet man sich heute meist für $\Gamma(x)$: Diese Funktionswerte sind in Tafelwerken tabelliert, und numerische Verfahren für ihre Berechnung stehen in den einschlägigen Unterprogrammbibliotheken und Computeralgebrasystemen zur Verfügung.

g) Summen, Reihen und Integrale

Das Integralzeichen entstand als ein stilisiertes „S“ wie Summe und wir haben bestimmte Integrale auch definiert über RIEMANNsche Summen.

Von daher sollte es nicht verwundern, daß umgekehrt auch Integrale Aussagen Summen und Reihen ermöglichen. Einer der einfachsten Zusammenhänge ist das folgende

Lemma: Die Funktion f sei stetig, monoton fallend und nichtnegativ für alle $x \geq m$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist für jedes $n \geq m$

$$\int_m^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq f(m) + \int_m^{n+1} f(x)\, dx\,.$$

Beweis: Wegen der Monotonie von f ist für jede ganze Zahl $k \geq m$ und jede reelle Zahl x mit $k \leq x \leq k+1$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)\,.$$

Da das Integral über eine konstante Funktion über ein Intervall der Länge eins einfach diese Konstante ist, folgt daher aus der Monotonieregel die Ungleichungskette

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\, dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\, dx = f(k)\,.$$

Summieren wir dies über alle k vom m bis zu einer oberen Schranke n, erhalten wir

$$\sum_{k=m}^{n} f(k+1) = \sum_{k=m}^{n+1} f(k) - f(m) \leq \int_m^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k)\,.$$

Somit ist

$$\int_m^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq f(m) + \int_m^{n+1} f(x)\, dx\,.$$

■

Lassen wir hier n gegen unendlich gehen, erhalten wir den

Satz: Die Funktion f sei stetig und monoton fallend für alle $x \geq m$, $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_m^\infty f(x)\,dx$ existiert. In diesem Fall ist

$$\int\limits_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^\infty f(k) \le f(m) + \int\limits_m^\infty f(x)\,dx\,.$$

Beweis: Wegen der Nichtnegativität von f sind

$$S_n = \sum_{k=m}^n f(k) \quad \text{und} \quad I_n = \int\limits_m^n f(x)\,dx$$

monoton wachsend mit n. Falls das uneigentliche Intergral konvergiert, ist sein Wert I daher eine obere Schranke für alle I_n und damit ist $I + f(m)$ nach dem gerade bewiesenen Lemma eine obere Schranke für alle S_n. Somit ist die Folge $(S_n)_{n\ge m}$ monoton wachsend und beschränkt, also nach Kapitel 2, §3, konvergent. Konvergiert umgekehrt diese Folge gegen einen Grenzwert S, so ist dieser eine obere Schranke für alle S_n, also nach dem Lemma auch für alle I_n, und damit konvergiert das Integral. Die behauptete Ungleichungskette folgt somit aus den Rechenregeln für Grenzwerte in Kapitel 2, §2. ■

Als erste Anwendung können wir noch einmal die harmonische Reihe betrachten: Nach dem Lemma ist

$$\log(n+1) \le H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le 1 + \log(n+1)\,,$$

die Folge der H_n geht also mit $\log n$ gegen unendlich, was auch einen neuen Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe liefert.

Betrachten wir dagegen für ein $r > 1$ die Summe $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^r}$, so konvergiert diese, denn das uneigentliche Integral

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}\bigg|_1^\infty = \frac{1}{r-1}$$

existiert. Für $r = 2$ etwa erhalten wir die Abschätzung

$$1 \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \le 2\,,$$

die wir in Kapitel 2 auch ohne Intergration gefunden haben. Um etwas Besseres zu bekommen, können wir die ersten Summanden stehen lassen und erst den Rest abschätzen: Beispielsweise ist

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k^2} = \frac{205}{144} = 1{,}4236\overline{1} \quad \text{und} \quad \int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^2} \le \sum_{k=5}^\infty \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{5} + \int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^2}\,;$$

da das Integral der Wert $1/5$ hat, liegt die Gesamtsumme somit zwischen $1{,}6236\overline{1}$ und $1{,}8236\overline{1}$.

h) Die Eulersche Summenformel

Wir betrachten irgendeine reellwertige differenzierbare Funktion f, deren Definitionsbereich das Intervall $[1,\ n]$ enthält.

Für eine reelle Zahl x bezeichnen wir wie üblich mit $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x und mit $\{x\} \underset{\text{def}}{=} x - [x]$ den gebrochenen Anteil von x. Für eine ganze Zahl k ist somit $\{x\} = x - k$ für alle x aus dem Intervall $[k,\ k+1)$.

Partielle Integration führt auf die Gleichung

$$\int\limits_k^{k+1} \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \left(x - k - \tfrac{1}{2}\right) f(x)\,\bigg|_k^{k+1} - \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{f(k+1) + f(k)}{2} - \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx\,.$$

Addition aller solcher Gleichungen von $k = 1$ bis $k = n - 1$ liefert

$$\int\limits_1^n \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_1^n f(x)\,dx\,,$$

womit man die Summe der $f(k)$ berechnen kann:

Satz (EULERsche Summenformel, einfachster Fall): Für eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich das Intervall $[1, n]$ umfaßt, ist

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n \left(\{x\} - \tfrac{1}{2}\right) f'(x)\,dx\,.$$

■

Als Beispiel wollen wir eine Näherungsformel für $n!$ herleiten: Wir schreiben $\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k$ und haben dann nach der EULERschen Summenformel

$$\begin{aligned}\log n! &= \int_1^n \log x\,dx + \frac{\log n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx\\ &= x(\log x - 1)\Big|_1^n + \frac{\log n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx\\ &= n(\log n - 1) + 1 + \frac{\log n}{2} + \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx\,.\end{aligned}$$

In dieser Formel stört noch das rechte Integral; dieses können wir wie folgt abschätzen: Für eine natürliche Zahl k ist

$$\int_k^{k+1} \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx = \int_{-\frac12}^{\frac12} \frac{x}{k+\frac12+x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac12} \left(\frac{x}{k+\frac12+x} - \frac{x}{k+\frac12-x}\right) dx = \int_0^{\frac12} \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2}\,dx\,.$$

Im Intervall von 0 bis $\frac12$ ist der Integrand monoton fallend, d.h.

$$0 \ge \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2} \ge \frac{-\frac12}{\left(k+\frac12\right)^2 - \frac14} = \frac{-2}{(2k+1)^2 - 1} \ge -\frac{1}{4k^2}\,,$$

und damit ist

$$0 \ge \int_k^{k+1} \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx = \int_0^{\frac12} \frac{-2x^2}{\left(k+\frac12\right)^2 - x^2}\,dx \ge -\frac{1}{8k^2}\,,$$

denn wir können das Integral abschätzen durch das Produkt aus der Länge des Integrationsintervalls und dem Minimum des Integranden. Summation von $k = 1$ bis $n-1$ schließlich gibt die Abschätzung

$$0 \ge \int_1^n \frac{\{x\}-\frac12}{x}\,dx \ge -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2}$$

für das störende Integral aus der obigen Formel.

Von der rechtsstehenden Summe wissen wir aus Kapitel 2, §6, daß sie (egal ob mit oder ohne acht im Nenner) für $n \to \infty$ konvergiert und können daher folgern, daß gilt

$$\log n! = n(\log n - 1) + \frac{\log n}{2} + R_n$$

mit einem Fehlerterm R_n, der für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Somit ist

$$n! \approx C \cdot n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

mit einer gewissen Konstanten C, deren Wert $\sqrt{2\pi}$ nur auf dem Umweg über ein zweidimensionales Intergral und damit nicht mit unseren Mitteln berechnet werden kann. Dieser Näherungsausdruck heißt STIRLINGsche Formeln; genau wie die Summenformel kann er noch beliebig verbessert werden.

Der schottische Mathematiker JAMES STIRLING (1692–1770) war Anhänger des gestürzten Königs Jakob II Stuart und hatte deshalb große politische Probleme bei seinem Studium; unter anderem wurde er deshalb von der Universität Oxford ausgeschlossen. 1717–1722 lebte er in Venedig und hatte auch gute Kontakte zu NICOLAUS BERNOULLI an der Universität von Padua; außerdem brachte er aus Venedig die Produktionsgeheimnisse der dortigen Glasbläser mit. Ab 1724 arbeitete er zehn Jahre lang als Mathematiklehrer in London, wo er viel mit NEWTON zusammentraf; 1735 wurde er Direktor einer schottischen Bergbaugesellschaft. In seine Londoner Zeit fällt die Veröffentlichung seines bedeutendsten Werks *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione er Interpolatione Serierum Infinitarum* im Jahre 1730, das die obige Formel als Beispiel zwei zu Proposition 28 enthält. Ebenfalls ziemlich bekannt wurde seine 1735 veröffentlichte Arbeit über die Gestalt der Erde.

§ 3: Zusammenfassung

Im letzten Kapitel dieses Semesters befaßten wir uns mit der Integration von Funktionen einer Veränderlichen. Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation; ist $F(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $f(x)$, so bezeichnen wir $F(x)$ als eine *Stammfunktion* von $f(x)$ und schreiben

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Stammfunktionen sind steht nur bis auf eine additive Konstante $C \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Integrale können auch eingeführt werden via Flächenberechnung; wir bezeichnen die Fläche unterhalb des Graphen der Funktion $f(x)$ zwischen den Werten $x = a$ und $x = b$ als das *bestimmte* Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Flächenteile, die unterhalb der x-Achse liegen, werden dabei als negativ betrachtet. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Das bestimmte Integral existiert zumindest dann, wenn die Funktion f im Intervall $[a,\ b]$ stückweise stetig ist.

Zur Berechnung von Stammfunktionen können wir die Differentiationsregeln umkehren: Aus der Linearität der Ableitung folgt die der Integration:

$$\int \big(cf(x) + dg(x)\big)\,dx = c\int f(x)\,dx + d\int g(x)\,dx\,.$$

Die LEIBNIZ-Regel $(uv)' = u'v + uv'$ führt auf die Regel zur *partiellen Integration:*

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx\,;$$

die Kettenregel führt zur Substitutionsregel

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C\,,$$

wobei F eine Stammfunktion von f bezeichnet. Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich für $f(x) = 1/x$ und damit $F(x) = \log|x|$:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \log|g(x)| + C\,.$$

Als Grenzwerte endlicher Integrale lassen sich in manchen Fällen auch bestimmte Integrale mit unterer Grenze $-\infty$ und/oder oberer Grenze ∞ definieren; auch bei Definitionslücken der zu integrierenden Funktion läßt sich gelegentlich (aber bei weitem nicht immer!) durch Grenzwertbetrachtungen ein Integral definieren.

Der Zusammenhang zwischen bestimmten Integralen und Summen läßt sich ausnutzen, um endliche wie auch unendliche Summen abzuschätzen; insbesondere ergibt sich daraus ein Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.