WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

10. April 2010

Modulklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Andernfalls ließe sich $\sqrt[3]{3} = p/q$ als gekürzter Bruch mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Dann wäre $p^3 = 3q^3$, also müßte p^3 durch drei teilbar sein. Dann wäre aber auch $p = 3m$ durch drei teilbar, also $p^3 = (3m)^3 = 27m^3$ durch 27 teilbar. Damit wäre $3q^3 = 27m^3$, also $q^3 = 9m^3$ durch neun teilbar. Das ist nur möglich, wenn q durch drei teilbar ist; da auch p eine Dreierzahl ist, widerspricht dies der Gekürztheit des Bruchs p/q.

2) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, so ist auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Lösung: *Falsch:* Mit $x_n = \frac{1}{n}$ haben wir zwar eine Nullfolge; setzen wir aber $y_n = n^2$, so ist $x_n y_n = n$, die Produktfolge ist also divergent. (Die Behauptung wäre richtig, wenn $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als beschränkt oder gar konvergent vorausgesetzt wäre.)

3) Richtig oder falsch: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ ist eine Nullfolge.

Lösung: *Richtig,* denn $|\sin n| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, während der Nenner n gegen unendlich geht.

4) Für die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(1) = 2$. Was ist $f(x)$?

Lösung: Da $f'(x)$ überall verschwindet, ist f konstant, hat also für alle $x \in \mathbb{R}$ denselben Wert $f(x) = f(1) = 2$.

5) Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 5x\,dx$?

Lösung: $$\int_0^{\pi/2} \sin 5x\,dx = \left.\frac{-\cos 5x}{5}\right|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos 0 = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\cdot e^{\sin x}\,dx = \left.e^{\sin x}\right|_0^{\pi} = e^{\sin\pi} - e^{\sin 0} = 0$

Lösung: *Richtig:* die Ableitung von $e^{\sin x}$ ist nach de Kettenregel $\cos(x)\cdot e^{\sin x}$, also ist $e^{\sin x}$ eine Stammfunktion des Integranden, und der Kosinus verschwindet bei allen echt halbzahligen Vielfachen von π.

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, *b)* $(i+\sqrt{3})^3$ und *c)* $\left(\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $2-\sqrt{5}$:

$$\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})^2}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}{4-5} = -9+4\sqrt{5}\,.$$

Für *b)* verwenden wir den binomischen Lehrsatz für Exponent drei:

$$\left(i+\sqrt{3}\right)^3 = i^3 + 3i^2\sqrt{3} + 3i\cdot 3 + 3\sqrt{3} = -i - 3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3} = 8i\,.$$

Damit läßt sich auch *c)* leicht lösen:

$$\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{8i}{2^3} = i \quad \text{und} \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2010} = i^{2010/3} = i^{670} = i^{668}\cdot i^2 = -1\,,$$

denn 668 ist durch vier teilbar und $i^4 = 1$.

d) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 16z + 25 = 0$!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$(z+8)^2 - 64 + 25 = (z+4)^2 - 39 = 0 \quad \text{oder} \quad (z+8)^2 = 39\,.$$

Dies gilt genau dann, wenn $z+8 = \pm\sqrt{39}$ ist, die Lösungen sind also $-4+\sqrt{39}$ und $-4+\sqrt{39}$.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k+2) = 2+7+\cdots+(5n+2) = \frac{(5n+4)(n+1)}{2}$!

Lösung: Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=0}^{1}(5k+2) = 2+7 = \frac{(5+4)\cdot 2}{2}$$

ist; das ist offensichtlich der Fall.
Ist die Behauptung für ein festes $n\in\mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(5k+2) &= \sum_{k=1}^{n}(5k+2) + \big(5(n+1)+2\big) \underset{\text{IA}}{=} \frac{(5n+4)(n+1)}{2} + (5n+7)\\ &= \frac{5n^2+5n+4n+4+10n+14}{2} = \frac{5n^2+19n+18}{2}\,.\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies gleich

$$\frac{\big(5(n+1)+4\big)\big((n+1)+1\big)}{2} = \frac{(5n+9)(n+2)}{2} = \frac{5n^2+19n+18}{2}$$

ist; auch das ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: *(9 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{für } x \le -2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} & \text{für } -2 < x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{für } 0 < x \le \pi \\ \dfrac{2}{x} & \text{für } x > \pi \end{cases} .$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f stetig, für welche differenzierbar?

Lösung: Die vier Teilfunktionen, aus denen f zusammengesetzt ist, sind allesamt nur durch Grundrechenarten, Polynome und trigonometrische Funktionen definiert; dividiert wird dabei nur durch x. Deshalb sind alle diese Teilfunktionen auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowohl stetig als auch differenzierbar. Somit ist auch f sowohl stetig als auch differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der möglichen Ausnahme der Randpunkte $x = -2$ und $x = \pi$. (Für $x = 0$ ist $f(x)$ nicht definiert.)

Für $x = -2$ ist $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = (2-2)^3 = 0$ und $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \frac{-2}{2} + \frac{(-2)^2}{8} = -\frac{1}{2}$, die Funktion ist also an der Stelle $x = -2$ nicht stetig und damit erst recht nicht differenzierbar.

Für $x = \pi$ ist $\lim\limits_{x \nearrow \pi} f(x) = \frac{1-\cos\pi}{\pi} = \frac{1-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$ und $\lim\limits_{x \searrow \pi} f(x) = \frac{2}{\pi}$, die Funktion ist dort also stetig. Im Intervall $(0, \pi)$ ist

$$f'(x) = \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}$$

mit Grenzwert $(\pi \sin\pi - 1 + \cos\pi)/\pi^2 = -2/\pi^2$. Für $x > \pi$ ist $f'(x) = -2/x^2$, was für $x \searrow \pi$ ebenfalls gegen $-2/\pi^2$ geht. Somit ist f im Punkt $x = \pi$ auch differenzierbar.

Die Funktion f ist also stetig und differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$; für $x = -2$ ist sie weder stetig noch differenzierbar, für $x = 0$ ist sie nicht definiert.

b) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Nullpunkt stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Das ist genau dann möglich, wenn $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ ist; wir müssen also diese beiden Grenzwerte berechnen. Der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) = 0$$

ist einfach zu berechnen; für den rechtsseitigen müssen wir die Regel von DE L'HÔPITAL anwenden, da sowohl der Zähler als auch der Nenner an der Stelle $x = 0$ verschwinden:

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{1} = \sin 0 = 0$$

Beide stimmen also überein; durch die Definition $f(0) = 0$ können wir die Funktion fortsetzen zu einer im Punkt $x = 0$ stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Nullpunkt differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Lösung: Da jede differenzierbare Funktion stetig ist, geht das nur dann, wenn die durch $f(0) = 0$ fortgesetzte Funktion bei $x = 0$ differenzierbar ist. Links der Null ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x}{8} \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \frac{1}{2}\,.$$

Rechts der Null ist

$$f'(x) = \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} - \frac{1 - \cos x}{x^2}\,.$$

Für $x = 0$ verschwinden sowohl Zähler als auch Nenner, wir müssen also wieder die Regel von DE L'HÔPITAL anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

und

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-\cos 0}{2} = -\frac{1}{2}\,,$$

wobei wir hier die Regel von DE L'HÔPITAL zweimal angewandt haben. Insgesamt ist

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \lim_{x \nearrow 0} f'(x)\,,$$

wir haben also eine differenzierbare Fortsetzung.

Aufgabe 4: (*11 Punkte*)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

a) Auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist f strikt monoton wachsend, auf welcher strikt monoton fallend?

Lösung: $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$ verschwindet für $x = 0$ und $x = -2$. Für $x < -2$ sind x und $x + 2$ beide negativ, $f'(x)$ also positiv. Für $-2 < x < 0$ ist x negativ, aber $x + 2$ positiv, also $f'(x) < 0$. Für $x > 0$ schließlich sind beide Faktoren positiv, also auch $f'(x)$. Somit ist f strikt monoton wachsend auf $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ oder } x > 0\}$ und strikt monoton fallend im offenen Intervall $(-2, 0)$.

b) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$ ist für $x < -1$ negativ, also ist die Funktion dort konkav; für $x > -1$ ist sie konvex.

c) Wo hat die Funktion f ihre lokalen Maxima, wo die Minima?

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß in einem lokalen Extremum die Ableitung $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ verschwinden; die einzigen Kandidaten für lokale Extrema sind daher $x = -2$ und $x = 0$. Da die Funktion für $x < -2$ nach *a)* monoton steigend ist, danach auf $(-2, 0)$ monoton fallend, nimmt sie im Punkt $x = -2$ ein lokales Maximum an. Bei $x = 0$ hat sie ein lokales Minimum, da sie links der Null monoton fällt, für $x > 0$ aber monoton wächst.

d) Warum können Sie ohne jede Rechnung sicher sein, daß es im Intervall $[-3, 1]$ Punkte gibt, in denen f sein Infimum *bzw.* sein Supremum auf $[-3, 1]$ annimmt?

Lösung: Nach dem Satz vom Maximum nimmt eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sowohl ihr Infimum (Minimum) als auch ihr Supremum (Maximum) an.

e) Bestimmen Sie alle $x \in [-3, 1]$, für die f sein Supremum auf $[-3, 1]$ annimmt und alle $y \in [-3, 1]$, für die f das Infimum annimmt!

Lösung: In Frage kommen nur die lokalen Extrema bei $x = -2$ und $x = 0$, die ja beide in $[-3, 1]$ liegen, sowie die Randpunkte des Intervalls. Wir haben $f(-3) = -1$, $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ und $f(1) = 3$. Somit ist Drei das Supremum und wird für $x = -2$ und $x = 1$ angenommen; das Infimum -1 wird an den Stellen $x = -3$ und $x = 0$ angenommen.

f) Finden Sie drei Intervalle $[a_i, b_i]$ mit ganzzahligen Grenzen $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3$, so daß jedes dieser Intervalle *genau* eine Nullstelle von f enthält. Numerische Methoden, egal ob mit oder ohne Taschenrechner, dürfen bei der Lösung *nicht* verwendet werden.

Lösung: Da $f(-3) = -1$ und $f(-2) = 3$ verschiedene Vorzeichen haben, gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(-3, -2)$. Da die Funktion dort strikt monoton wachsend ist, gibt es genau eine.
Zwischen -2 und 0 ist die Funktion strikt monoton fallend; da $f(-2) = 3$ und $f(0) = -1$ verschiedene Vorzeichen haben, gibt es auch dort genau eine Nullstelle.
Für $x > 0$ schließlich ist die Funktion wieder strikt monoton wachsend, $f(0) = -1$ ist negativ und $f(1) = 3$ positiv; also liegt auch dort genau eine Nullstelle.
Die drei Intervalle $[-3, -2]$, $[-2, 0]$ und $[0, 1]$ haben also alle verlangten Eigenschaften.

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe des Polynoms $f(x) = x^3 - x$ um den Punkt $x = 1$!

Lösung: Wir brauchen zunächst die Ableitungen von f an der Stelle $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - x & \qquad f(-1) &= 0 \\
f'(x) &= 3x^2 - 1 & f'(-1) &= 2 \\
f''(x) &= 6x & f''(-1) &= 6 \\
f'''(x) &= 6 & f'''(-1) &= 6 \\
f^{(4)}(x) &= 0 & f^{(4)}(-1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

und auch alle höheren Ableitungen verschwinden. Die TAYLOR-Reihe um $x = -1$ ist somit

$$T_{f,1}(h) = 0 + \frac{2h}{1!} + \frac{6h^2}{2!} + \frac{6h^3}{3!} = 2h + 3h^2 + h^3\,.$$

In der Tat ist $f(1 + h) = (1 + h)^3 - (1 + h) = 2h + 3h^2 + h^3$.

b) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $g(x) = e^{-x} + 3\cos 2x$ um den Nullpunkt!

Lösung: Da wir die TAYLOR-Reihen

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \cdots$$

kennen, können wir hier auf die Berechnung der Ableitungen verzichten: wir setzen $y = -x$ und $z = 2x$ und erhalten das gesuchte Polynom als

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + 3\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24}\right) = 4 - x - \frac{11x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{49}{24}x^4 .$$

(Berechnung der Ableitungen hätte mit nur geringfügig größerem Aufwand zum gleichen Ergebnis geführt.)

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sin(x) \cdot \cos(x)$ zu einer reinen Sinusfunktion, und berechnen Sie seine zweite Ableitung!

Lösung: Nach den EULERschen Formeln ist

$$\sin(x)\cos(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{4i} = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Die Ableitung davon ist $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2x = \cos 2x$, was wiederum die Ableitung $-2\sin 2x$ hat.

b) Zeigen Sie, daß $\quad \sin 4x = 8\cos^3 x \sin x - 4 \sin x \cos x \quad$ ist!

Lösung: $\sin 4x$ ist der Realteil von

$$\begin{aligned} e^{4ix} &= \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos x + i \sin x)^4 \\ &= \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x , \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} \sin 4x &= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x = 4 \sin x \cos x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\ &= 4 \sin x \cos x \left(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\right) = 4 \sin x \cos x \left(2\cos^2 x - 1\right) \\ &= 8\cos^3 x \sin x - 4 \sin x \cos x . \end{aligned}$$