WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

10. April 2010

Modulklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$

2) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, so ist auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3) Richtig oder falsch: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ ist eine Nullfolge.

4) Für die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(1) = 2$. Was ist $f(x)$?

5) Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 5x \, dx$?

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\cdot e^{\sin x}\,dx = e^{\sin x}\Big|_0^{\pi} = e^{\sin \pi} - e^{\sin 0} = 0$

Aufgabe 1: **(**7 *Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, *b)* $(i+\sqrt{3})^3$ und *c)* $\left(\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$ möglichst einfach dar!

d) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 16z + 25 = 0$!

Aufgabe 2: **(**5 *Punkte)*

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(5k+2) = 2 + 7 + \cdots + (5n+2) = \frac{(5n+4)(n+1)}{2}$!

Aufgabe 3: *(9 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{für } x \le -2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} & \text{für } -2 < x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{für } 0 < x \le \pi \\ \dfrac{2}{x} & \text{für } x > \pi \end{cases} .$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f stetig, für welche differenzierbar?

b) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Nullpunkt stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

c) Läßt sich f fortsetzen zu einer im Nullpunkt differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 4: *(11 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

a) Auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist f strikt monoton wachsend, auf welcher strikt monoton fallend?

b) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

c) Wo hat die Funktion f ihre lokalen Maxima, wo die Minima?

d) Warum können Sie ohne jede Rechnung sicher sein, daß es im Intervall $[-3, 1]$ Punkte gibt, in denen f sein Infimum *bzw.* sein Supremum auf $[-3, 1]$ annimmt?

e) Bestimmen Sie alle $x \in [-3, 1]$, für die f sein Supremum auf $[-3, 1]$ annimmt und alle $y \in [-3, 1]$, für die f das Infimum annimmt!

f) Finden Sie drei Intervalle $[a_i, b_i]$ mit ganzzahligen Grenzen $a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le a_3 \le b_3$, so daß jedes dieser Intervalle *genau* eine Nullstelle von f enthält. Numerische Methoden, egal ob mit oder ohne Taschenrechner, dürfen bei der Lösung *nicht* verwendet werden.

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe des Polynoms $f(x) = x^3 - x$ um den Punkt $x = 1$!

b) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $g(x) = e^{-x} + 3\cos 2x$ um den Nullpunkt!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sin(x)\cdot\cos(x)$ zu einer reinen Sinusfunktion, und berechnen Sie seine zweite Ableitung!

b) Zeigen Sie, daß $\sin 4x = 8\cos^3 x \sin x - 4 \sin x \cos x$ ist!

Formelsammlung

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Abgabe bis zum Samstag, dem 10. April 2010, um 11^{30} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •