Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

8. Februar 2010

Modulklausur Analysis I

••• Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! •••
••• Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge •••
••• bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst •••
••• auf das, womit sie schnell Punkte holen können! •••

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Andernfalls ließe sich $\sqrt[4]{2} = p/q$ als gekürzter Bruch mit $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Dann wäre $p^4 = 2q^4$, also müßte p^4 gerade sein. Dann wäre aber auch $p = 2m$ gerade, also $p^4 = (2m)^4 = 16m^4$ durch 16 teilbar. Damit wäre $2q^4 = 16m^4$, also $q^4 = 8m^4$ durch acht teilbar. Dies ist nur möglich, wenn q wie p gerade ist, was der Gekürztheit des Bruchs p/q widerspricht.

2) Richtig oder falsch: Falls eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wächst, ist sie auch stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Lösung: *Falsch;* ein Gegenbeispiel ist etwa die bei Null unstetige Funktion mit $f(x) = x$ für $x \le 0$ und $f(x) = x+1$ für $x > 0$ oder die für alle $x \in \mathbb{Z}$ unstetige Funktion $f(x) = x+[x]$.

3) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$?

Lösung: Nach der Summenformel für die unendliche geometrische Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\,.$$

4) Für die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(1) = 0$. Was ist $f(x)$?

Lösung: Da $f'(x)$ die konstante Funktion zwei ist, hat $f(x)$ die Form $f(x) = 2x + C$ mit einer reellen Zahl C. Wenn $f(1) = 2+C = 0$ sein soll, muß $C = -2$ sein, d.h. $f(x) = 2x-2$.

5) Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 3x \, dx$?

Lösung: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 3x \, dx = \left.\frac{\sin 3x}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin 0 = -\frac{1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}\,.$

6) Richtig oder falsch: $\int_{-1}^{2} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_{-1}^{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - (-1)\right) = -\frac{3}{8}$

Lösung: *Falsch;* das Intergral über einen nirgends negativen Integranden kann unmöglich negativ sein. Die Formel für das Integral über x^n darf hier nicht angewendet werden, da der Integrand für $n < 0$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist; die Formel gilt aber nur, wenn sowohl Integrand als auch Stammfunktion im gesamten Integrationsintervall definiert und stetig sind.

Aufgabe 1: (*7 Punkte*)

Stellen Sie die Zahlen

a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ und *b)* $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2010}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $2+\sqrt{3}$:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3} = 7+4\sqrt{3}\,.$$

Für *b)* berechnen wir zunächst das Quadrat der Zählers: $(i+1)^2 = i^2+2i+1 = 2i$. Damit ist

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i \quad \text{und} \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2010} = i^{1005} = i^{1004}\cdot i = i\,,$$

denn 1004 ist durch vier teilbar und $i^4 = 1$.

c) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 4iz - 5 = 0$!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$(z-2i)^2 + 4 - 5 = (z-2i)^2 - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad (z-2i)^2 = 1\,.$$

Dies gilt genau dann, wenn $z - 2i = \pm 1$ ist, die Lösungen sind also $1+2i$ und $-1+2i$.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = 1+4+\cdots+(3n-2) = \frac{3n^2-n}{2}$!

Lösung: Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=1}^{1}(3k-2) = 1 = \frac{3-1}{2}$$

ist; das ist offensichtlich der Fall.

Ist die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2) + \big(3(n+1)-2\big) \underset{\text{IA}}{=} \frac{3n^2-n}{2} + (3n+1)$$
$$= \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

Wir müssen zeigen, daß dies gleich

$$\frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{3n^2+6n+3-n-1}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

ist; auch das ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)
In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+2x & \text{für } x \le -1 \\ 2x^2+1 & \text{für } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ \sin x - 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

Lösung: Die vier Teilfunktionen, aus denen f zusammengesetzt ist, sind entweder Polynome oder trigonometrische Funktionen oder die Differenz einer trigonometrischen Funktion und einer Konstanten; diese Teilfunktionen sind daher sowohl stetig als auch differenzierbar. Somit ist auch f sowohl stetig als auch differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der möglichen Ausnahme der Randpunkte $x = -1$, $x = 0$ und $x = \pi$.
Für $x = -1$ ist $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = 3-2 = 1$ und $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = 2+1 = 3$, die Funktion ist also an der Stelle $x = -1$ nicht stetig und damit erst recht nicht differenzierbar.
Für $x = 0$ ist $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \cos 0 = 1$, die Funktion ist dort also stetig. Ihre Ableitung ist links der Null gleich $4x$ mit Grenzwert Null für $x \nearrow 0$, rechts der Null ist sie $-\sin x$, was für $x \searrow 0$ ebenfalls Null wird. An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion also sowohl stetig als auch differenzierbar.
Für $x = \pi$ ist $\lim\limits_{x \nearrow \pi} f(x) = \cos \pi = -1$ und $\lim\limits_{x \searrow \pi} f(x) = \sin \pi - 1 = -1$, die Funktion ist dort also stetig. Ihre Ableitung ist links der Null gleich $-\sin x$ mit Grenzwert Null für $x \nearrow \pi$, rechts der Null ist sie $\cos x$, was für $x \searrow \pi$ gegen -1 geht. Somit ist f im Punkt $x = \pi$ nicht differenzierbar.
Die Funktion f ist also stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, und sie ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \pi\}$.

Aufgabe 4: (*12 Punkte*)

a) Wo hat die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

Lösung: Da f differenzierbar ist, muß in einem lokalen Extremum die Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$$

verschwinden; die einzigen Kandidaten für lokale Extrema sind daher $x = -1$ und $x = +1$. Für $x < -1$ und für $x > 1$ ist $f'(x) > 0$, die Funktion f also monoton steigend; für $-1 < x < 1$ ist $f'(x) < 0$, die Funktion f also monoton fallend. Somit liegt bei $x = -1$ ein lokales Maximum mit $f(-1) = 3$, bei $x = 1$ ein lokales Minimum mit $f(1) = -1$.

b) Zeigen Sie, daß f drei reelle Nullstellen hat, und finden sie für jede dieser Nullstellen ein Intervall der Länge eins mit ganzzahligen Grenzen, in dem sie liegt!

Lösung: Da $f(-1) = 3$ und $f(1) = -1$ verschiedene Vorzeichen haben, gibt es auf jeden Fall eine Nullstelle im Intervall $(-1, 1)$. Für $x = 0$ ist $f(0) = 1$ positiv; zumindest eine solche Nullstelle liegt daher im Intervall $(0, 1)$.

Für $x \to -\infty$ geht auch $f(x)$ gegen $-\infty$; da $f(-1) = 3$ positiv ist, muß es daher eine Nullstelle $x < -1$ geben. $f(-2) = -1$ ist negativ, also liegt sie im Intervall $(-2, -1)$.

Entsprechend muß es auch eine Nullstelle $x > 1$ geben, denn $f(1) = -1$ ist negativ und $f(x)$ geht für $x \to \infty$ gegen unendlich. Da $f(2) = 3$ positiv ist, liegt sie im Inervall $(1, 2)$.

c) Zeigen Sie, daß f *genau* drei reelle Nullstellen hat!

Lösung: Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten: Wie wir in *a)* gesehen haben, ist die Funktion in den Bereichen $x < -1$, $x > 1$ und im Intervall $(-1, 1)$ streng monoton, also kann es dort jeweils höchstens eine Nullstelle geben. Somit gibt es insgesamt höchstens drei Nullstellen; da wir bereits wissen, daß es mindestens drei gibt, gibt es genau drei.

Alternativ kann man zum Beispiel die möglicherweise aus der Schule bekannte Tatsache verwenden, daß ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom n-ten Grades höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.

d) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 6x$ ist für $x < 0$ negativ, also ist die Funktion dort konkav; für $x > 0$ ist sie konvex.

e) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann liegt zwischen je zwei Nullstellen der Ableitung $g'(x)$ mindestens eine Nullstelle von g

Lösung: *Falsch;* die Funktion $g(x) = f(x)+10$ hat dieselbe Ableitung wie f mit Nullstellen bei -1 und 1. Zwischen diesen beiden Werten fällt g monoton von $g(-1) = f(1) + 10 = 13$ auf $g(1) = f(1) + 10 = 9$, hat dort also keine Nullstelle.

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe des Polynoms $f(x) = x^2 + x + 1$ um den Punkt $x = -1$!

Lösung: Wir brauchen zunächst die Ableitungen von f an der Stelle $x = -1$:

$$\begin{array}{lcllcr} f(x) &=& x^2+x+1 & f(-1) &=& 1 \\ f'(x) &=& 2x+1 & f'(-1) &=& -1 \\ f''(x) &=& 2 & f''(-1) &=& 2 \\ f'''(x) &=& 0 & f'''(-1) &=& 0\,, \end{array}$$

und auch alle höheren Ableitungen verschwinden. Die TAYLOR-Reihe um $x = -1$ ist somit $T_{f,-1}(h) = 1 - h + h^2$ In der Tat ist $f(-1 + h) = (-1 + h)^2 - 1 + h + 1 = h^2 - h + 1$.

b) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von $g(x) = e^x - \sin 2x$ um den Nullpunkt!

Lösung: Da wir die TAYLOR-Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

kennen, können wir hier auf die Berechnung der Ableitungen verzichten; das gesuchte Polynom ist

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(2x - \frac{(2x)^3}{6}\right) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3 .$$

(Berechnung der Ableitungen hätte mit nur geringfügig größerem Aufwand zum gleichen Ergebnis geführt.)

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Drücken Sie $\sin^2 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

Lösung: Nach den EULERschen Formeln ist

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} .$$

b) Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom in $\cos x$!

Lösung: $\cos 4x$ ist der Realteil von

$$\begin{aligned} e^{3ix} &= \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x , \end{aligned}$$

also $\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$. Um daraus ein Polynom in $\cos x$ zu machen, müssen wir $\sin^2 x$ ersetzen durch $1 - \cos^2 x$ und erhalten

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x .$$