Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

8. Februar 2010

Modulklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}$

2) Richtig oder falsch: Falls eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wächst, ist sie auch stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

3) Was ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$?

4) Für die differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $f'(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(1) = 0$. Was ist $f(x)$?

5) Was ist $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 3x \, dx$?

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^{-4}\, dx = \frac{x^{-3}}{-3}\bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - (-1)\right) = -\frac{3}{8}$

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\displaystyle\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ und *b)* $\displaystyle\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2010}$ möglichst einfach dar!

c) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 4iz - 5 = 0$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = 1 + 4 + \cdots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}$!

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & \text{für } x \le -1 \\ 2x^2 + 1 & \text{für } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ \sin x - 1 & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

stetig, in welchen differenzierbar?

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Wo hat die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ihre lokalen Maxima, wo die Minima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

b) Zeigen Sie, daß f drei reelle Nullstellen hat, und finden sie für jede dieser Nullstellen ein Intervall der Länge eins mit ganzzahligen Grenzen, in dem sie liegt!

c) Zeigen Sie, daß f *genau* drei reelle Nullstellen hat!

d) Wo ist die Funktion konvex, wo konkav?

e) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann liegt zwischen je zwei Nullstellen der Ableitung $g'(x)$ mindestens eine Nullstelle von g

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe des Polynoms $f(x) = x^2 + x + 1$ um den Punkt $x = -1$!

b) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von $g(x) = e^x - \sin 2x$ um den Nullpunkt!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Drücken Sie $\sin^2 x$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\cos ax$ mit $a \in \mathbb{R}$!

b) Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom in $\cos x$!

Abgabe bis zum Montag, dem 8. Februar 2010, um 11^{45} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •