Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

7. November 2009

Probeklausur Analysis I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für drei Mengen A, B, C gilt: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Lösung: *Falsch:* Wenn A Elemente enthält, die nicht in C liegen, liegen diese zwar in der rechten, nicht aber in der linken Menge. Für $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ und $C = \{2, 4, 6\}$ etwa ist $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, aber $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 6\}$.

2) Richtig oder falsch: Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu $1/z$ der Kehrwert $1/\overline{z}$ der konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ von z.

Lösung: *Richtig:* Die konjugiert komplexe Zahl zu $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$ ist $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{z}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

3) Richtig oder falsch: Die Vorschrift $d(x, y) = (x - y)^2$ definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

Lösung: *Falsch;* es gibt zwar keine Probleme mit der Symmetrie und der positiven Definitheit, aber die Dreiecksungleichung ist verletzt: $d(0, 2) = 2^2 = 4$ ist größer als $d(0, 1) + d(1, 2) = 1^2 + 1^2 = 2$.

4) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen derart, daß die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Beträge konvergiert, so konvergiert auch die Folge selbst.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise divergiert die Folge der Potenzen $(-1)^n$ von -1, da sie immer abwechselnd die Werte -1 und $+1$ annimmt. Die Folge der Beträge ist aber die konstante Folge aus lauter Einsern, und die konvergiert natürlich.

5) Richtig oder falsch: Die Summe zweier monoton fallender Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Lösung: *Richtig:* Ist $x_{n+1} \leq x_n$ und $y_{n+1} \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch stets $x_{n+1} + y_{n+1} \leq x_n + y_n$.

6) Richtig oder falsch: $\sqrt[10]{10} \in \mathbb{Q}$

Lösung: *Falsch:* Andernfalls ließe sich $\sqrt[10]{10} = p/q$ als ein gekürzter Bruch darstellen mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann wäre $p^{10} = 10q^{10}$, also müßte $p^1 0$ durch 10 teilbar sein. Dann wäre aber auch $p = 10m$ durch zehn teilbar, also $p^{10} = (10m)^{10} = 10^{10}m^{10}$ durch 10^{10}. Damit wäre $10q^{10} = 10^{10}m^{10}$, also $q^{10} = 10^9 m^{10}$ durch 10^9 teilbar. Dies ist nur möglich, wenn q wie p eine Zehnerzahl ist, was der Gekürztheit des Bruchs p/q widerspricht.

7) Drücken Sie die Potenz $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion aus und verwenden Sie dabei, soweit möglich, die Logarithmusfunktion nur mit ganzzahligen Argumenten!

Lösung: Nach Definition der allgemeinen Potenz ist

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\log\sqrt{2}} = e^{(\sqrt{2}\,\log 2)/2} .$$

8) *Richtig oder falsch:* Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden abgeschlossenen Intervalls unter f wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Lösung: *Richtig,* denn eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an, und nach dem Zwischenwertsatz gilt dasselbe für jeden Wert zwischen diesen beiden Extremen.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}$ und *b)* $\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^{2009}$ möglichst einfach dar!

Lösung: Bei *a)* erweitern wir so, daß wir im Nenner die dritte binomische Formel anwenden können, also mit $\sqrt{17}+1$:

$$\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1} = \frac{\left(\sqrt{17}+1\right)^2}{17-1} = \frac{18+2\sqrt{17}}{16} = \frac{9}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8} .$$

Für *b)* berechnen wir zunächst das Quadrat der Zählers: $(i-1)^2 = i^2 - 2i + 1 = -2i$. Damit ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^{2009} &= \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^{2008} \cdot \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{1004} \cdot \frac{i-1}{\sqrt{2}} = (-i)^{1004} \cdot \frac{i-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) ,\end{aligned}$$

denn 1004 ist durch vier teilbar und $(-i)^4 = 1$.

c) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 8iz - 20 = 0$!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung als

$$(z-4i)^2 + 16 - 20 = (z-4i)^2 - 4 = 0 \quad \text{oder} \quad (z-4i)^2 = 4 .$$

Dies gilt genau dann, wenn $z - 4i = \pm 2$ ist, die Lösungen sind also $2 + 4i$ und $-2 + 4i$.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Zeigen Sie: Die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \;!$$

Hinweis: Hier, wie so oft in der Mathematik, kann man einiges an Arbeit sparen, wenn man gemeinsame Terme geschickt ausklammert.

Lösung: Das kann beispielsweise durch vollständige Induktion bewiesen werden: Für den Induktionsanfang muß gezeigt werden, daß

$$1^2 = \frac{1\cdot 3\cdot 1}{3} = 1$$

ist; das ist offensichtlich der Fall.
Ist die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2n+1)^2 \underset{\text{IA}}{=} \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)\big(n(2n-1)+3(2n+1)\big)}{3} = \frac{(2n+1)(2n^2-n+6n+3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dies gleich

$$\frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3} = \frac{(2n+1)\big((n+1)(2n+3)\big)}{3} = \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}$$

ist; auch das ist offensichtlich erfüllt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die behauptete Formel somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Für eine reelle Zahl $0 < x < 1$ seien Intervalle $[a_n, b_n]$ definiert durch

$$a_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n}\,,$$

wobei $[\cdots]$ die GAUSS-Klammer bezeichnet, d.h. für $u \in \mathbb{R}$ ist $[u]$ jene ganze Zahl, für die $[u] \le u < [u]+1$ ist.

a) Geben Sie die Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und $[a_3, b_3]$ für $x = \log 2 \approx 0{,}6931471806$ explizit an!

Lösung: Für $n = 1$ ist $[10x] = [6{,}931\ldots] = 6$, also ist $[a_1, b_1] = [0{,}6,\ 0{,}7]$. Für $n = 2$ brauchen wir $[100x] = [69{,}31\ldots] = 69$, also ist $[a_2,\ b_2] = [0{,}69,\ 0{,}7]$. Für $n = 3$ schließlich haben wir $[100x] = [693{,}1\ldots] = 693$, also $[a_3,\ b_3] = [0{,}693,\ 0{,}694]$.

b) Zeigen Sie, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist!

Lösung: Da die obere Grenze stets größer als die untere ist, haben wir es zumindest immer mit Intervallen zu tun. Zum Nachweis, daß jedes dieser Intervalle in seinem Vorgänger liegt, müssen wir zeigen, daß $a_{n+1} \ge a_n$ und $b_{n+1} \le b_n$ ist. Nach Definition ist

$$10^n a_n = [10^n x] \le 10^n x < [10^n x] + 1 = 10^n b_n\,.$$

Multiplikation mit zehn liefert die Ungleichung

$$10^{n+1} a_n \le 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_n\,,$$

wobei links und rechts ganze Zahlen stehen.
Nach Definition des Intervalls $[a_{n+1},\ b_{n+1}]$ ist auch

$$10^{n+1} a_{n+1} \le 10^{n+1} x < 10^{n+1} b_{n+1}\,,$$

wobei hier nun rechts und links ganze Zahlen stehen, die sich nur um eins unterscheiden. Links steht daher die *größte* ganze Zahl kleiner oder gleich $10^{n+1}x$, und die ist somit insbesondere größer oder gleich $10^{n+1}a_n$. Entsprechend steht rechts die *kleinste* ganze Zahl echt größer $10^{n+1}x$, und diese ist insbesondere kleiner oder gleich der obigen Schranke $10^{n+1}b_n$. Also ist

$$10^{n+1}a_n \le 10^{n+1}a_{n+1} < 10^{n+1}b_{n+1} \le 10^{n+1}b_n \quad \text{und} \quad a_m \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n\,,$$

die Intervalle sind also ineinander enthalten.

Als letztes muß noch gezeigt werden, daß die Intervallängen eine Nullfolge bilden. Hier ist

$$b_n - a_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n} - \frac{[10^n x]}{10^n} = \frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

und wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|q| < 1$ eine Nullfolge. Hier ist $q = \frac{1}{10}$, also haben wir eine Nullfolge, und damit sind alle Forderungen an eine Intervallschachtelung nachgewiesen.

c) Welche reelle Zahl wird durch diese Intervallschachtelung definiert?

Lösung: Nach der in *b)* betrachteten Ungleichung

$$10^n a_n = [10^n x] \le 10^n x < [10^n x] + 1 = 10^n b_n$$

ist insbesondere $a_n \le x < b_n$ für alle n, also liegt x in allen Intervallen $[a_n, b_n]$. Somit ist x die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Das *harmonische Mittel* zweier positiver Zahlen a, b ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels ihrer Kehrwerte, also die Zahl

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, daß es stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ der beiden Zahlen ist! Wann sind die beiden Mittelwerte gleich?

Lösung: Durch Erweitern mit $2ab$ bringen wir das harmonische Mittel auf die handhabbarere Form

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{b+a}.$$

Um zu zeigen, daß dies kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist, berechnen wir die Differenz

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

Der Zähler als Quadrat einer reellen Zahl ist stets größer oder gleich Null, der Nenner als Summe zweier positiver Zahlen ist positiv, also ist diese Differenz größer oder gleich Null, das harmonische Mittel also kleiner oder gleich dem arithmetischen. Wenn beide gleich sind, muß die Differenz verschwinden; dies ist genau dann der Fall, wenn der Zähler $(a-b)^2$ verschwindet, wenn also $a = b$ ist.

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{n+\frac{3}{2}}{n-\frac{3}{2}}$ *b)* $y_n = \dfrac{2^n+1}{3^n}$ *c)* $z_n = \dfrac{2^n+2^{2n}}{3^n}$ *d)* $w_n = (-1)^n + 2^n$

Lösung:

a) $x_n = \dfrac{n+\frac{3}{2}}{n-\frac{3}{2}} = \dfrac{n-\frac{3}{2}+3}{n-\frac{3}{2}} = 1 + \dfrac{3}{n-\frac{3}{2}}$.

Die Folge u_n mit $u_n = 1/(n - \frac{3}{2}$ ist eine Nullfolge, denn für $n \ge 2$ ist $|u_n| = u_n < 1/n$, und letzteres ist eine uns wohlbekannte Nullfolge. Damit konvergiert die Folge der Zahlen $x_n = 1 + 3u_n$ gegen eins. Als konvergente Folge ist sie beschränkt, allerdings ist sie nicht monoton fallend, da

$$x_1 = 1 + \frac{3}{1-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

das Infimum der Folge ist, während sie ab x_2 monoton fällt.

b) $y_n = \dfrac{2^n+1}{3^n} = \dfrac{2^n}{3^n} + \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ die Folge ist also die Summe zweier Folgen der Form $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q| < 1$. Beides sind daher monotron fallende Nullfolgen, also auch ihre Summe. Als konvergente Folge ist diese insbesondere beschränkt.

c) $z_n = \dfrac{2^n+2^{2n}}{3^n} = \dfrac{2^n}{3^n} + \dfrac{2^{2n}}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ ist die Summe einer Nullfolge und einer unbeschränkt wachsenden Folge, also ist sie nicht beschränkt und damit insbesondere nicht konvergent. (Sie divergiert bestimmt gegen ∞.) Sie ist monoton wachsend, denn

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\right) - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left(\frac{2}{3}-1\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^{n}\left(\frac{4}{3}-1\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) > 0\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) $w_n = (-1)^n + 2^n$ wächst offensichtlich unbeschränkt, da 2^n unbeschränkt wächst und der erste Summand nur den Betrag eins hat. Das Wachstum ist auch monoton, denn $2^{n+1} - 2^n = 2^n \ge 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = 2$, so daß $w_{n+1} - w_n \ge 0$ ist für alle n. Die Folge ist nicht konvergent, da sie nicht beschränkt ist; auch sie divergiert bestimmt gegen ∞.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum und das Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = (-2, -1) \cup (1, 2)$ *b)* $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 < 5\right\}$ *c)* $C = \left\{1 - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$!

Lösung:

a) Da das erste Intervall links vom zweiten liegt, ist seine Untergrenze eine untere Schranke für A; eine größere kann es nicht geben, denn zu jedem $N > -2$ gibt es ein Element von $(-2, -1)$, das größer ist. Das Infimum von A ist also -2. Das Supremum ist entsprechend gleich $+2$, denn als Obergrenze des rechtsliegenden Intervalls ist das eine obere Schranke, und zu jeder kleineren Zahl gibt es ein Element von $(1, 2)$, das größer ist.

b) Da die Funktion $x \mapsto x^3$ monoton wächst, ist die Bedingung $x^3 < 5$ äquivalent zu $x \le \sqrt[3]{5}$. Somit ist $\sqrt[3]{5}$ das Supremumm; ein Infimum existiert nicht, da insbesondere alle negativen reellen zahlen in B liegen.

c) Die Folge der Zahlen $1/n$ konvergiert streng monoton fallend gegen die Null, also konvergiert die Folge der $1 - 1/n$ streng monoton steigend gegen die Eins. Damit ist $1 - 1/1 = 0$ die größte untere Grenze, das Infimum also, und das Supremum ist der Grenzwert Eins.

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*
In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$
stetig?

Lösung: Für $x \ne \pm 1$ stimmt die Funktion in der Umgebung von x mit einer Polynomfunktion überein, ist dort also stetig.

An der Stelle $x = -1$ ist $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$, und für $x < -1$ ist $f(x) = x$, was für x nahe bei -1 ebenfalls nahe bei -1 liegt. Daher sollten wir erwarten, daß die Funktion bei $x = -1$ stetig ist. Sei also ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Funktion $x \mapsto x^2 - 2$ stetig ist, gibt es ein δ_1, so daß $\left|(u^2 - 2) - (1^2 - 2)\right| = \left|(u^2 - 2) - (-1)\right| < \varepsilon$ ist für $|u - x| < \delta_1$. Da dies erst recht für alle kleineren Werte von δ_1 gilt, können wir dabei annehmen, daß $\delta_1 < 2$ ist. Mit $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon)$ gilt dann: Ist $|x - u| < \delta$, so ist

$$|f(u) - f(-1)| \le \max\bigl(|u - (-1)|\,, \left|(u^2 - 2) - (-1)\right|\bigr) < \varepsilon\,.$$

Also ist die Funktion stetig bei $x = -1$.

Auch bei $x = 1$ ist $f(x) = -1$; rechts von $x = 1$ allerdings ist $f(x) = x + 1 > 2$ für alle $x > 2$. Damit kann die Funktion hier nicht stetig sein: Gäbe es beispielsweise zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(u) - f(1)| = |f(u) - (-1)| < \varepsilon$ wäre wann immer $|u - 1| < \delta$ ist, so wäre insbesondere

$$\left|f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - (-1)\right| = \left|3 + \frac{\delta}{2}\right| = 3 + \frac{\delta}{2} < \varepsilon = 1\,,$$

was absurd ist.