Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

7. November 2009

Probeklausur Analysis I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für drei Mengen A, B, C gilt: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

2) Richtig oder falsch: Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu $1/z$ der Kehrwert $1/\overline{z}$ der konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ von z.

3) Richtig oder falsch: Die Vorschrift $d(x, y) = (x - y)^2$ definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

4) Richtig oder falsch: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen derart, daß die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ der Beträge konvergiert, so konvergiert auch die Folge selbst.

5) Richtig oder falsch: Die Summe zweier monoton fallender Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

6) Richtig oder falsch: $\sqrt[10]{10} \in \mathbb{Q}$

7) Drücken Sie die Potenz $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion aus und verwenden Sie dabei, soweit möglich, die Logarithmusfunktion nur mit ganzzahligen Argumenten!

8) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so ist das Bild eines jeden abgeschlossenen Intervalls unter f wieder ein abgeschlossenes Intervall.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*
Stellen Sie die Zahlen

a) $\dfrac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}$ und *b)* $\left(\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^{2009}$ möglichst einfach dar!

c) Finden Sie alle komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 8iz - 20 = 0$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie: Die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\ !$$

Hinweis: Hier, wie so oft in der Mathematik, kann man einiges an Arbeit sparen, wenn man gemeinsame Terme geschickt ausklammert.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Für eine reelle Zahl $0 < x < 1$ seien Intervalle $[a_n, b_n]$ definiert durch

$$a_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{[10^n x] + 1}{10^n},$$

wobei $[\cdots]$ die GAUSS-Klammer bezeichnet, d.h. für $u \in \mathbb{R}$ ist $[u]$ jene ganze Zahl, für die $[u] \le u < [u] + 1$ ist.

a) Geben Sie die Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und $[a_3, b_3]$ für $x = \log 2 \approx 0{,}6931471806$ explizit an!

b) Zeigen Sie, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist!

c) Welche reelle Zahl wird durch diese Intervallschachtelung definiert?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Das *harmonische Mittel* zweier positiver Zahlen a, b ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels ihrer Kehrwerte, also die Zahl

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln, daß es stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$ der beiden Zahlen ist! Wann sind die beiden Mittelwerte gleich?

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*
Entscheiden Sie für jede der hier definierten Folgen, ob sie konvergent, beschränkt und/oder monoton ist! Geben Sie im Falle der Konvergenz, soweit möglich, auch den Grenzwert an!

a) $x_n = \dfrac{n + \frac{3}{2}}{n - \frac{3}{2}}$ *b)* $y_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n}$ *c)* $z_n = \dfrac{2^n + 2^{2n}}{3^n}$ *d)* $w_n = (-1)^n + 2^n$

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum und das Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

a) $A = (-2, -1) \cup (1, 2)$ *b)* $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 5\right\}$ *c)* $C = \left\{1 - \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$!

Aufgabe 7: *(6 Punkte)*
In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ x + 1 & \text{für } x > \ \ 1 \end{cases}$ stetig?

Abgabe bis zum Samstag, dem 7. November 2009, um 11^{45} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •