WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 7. – 9. Dezember 2009

a) Was ist i^{-i} ?

Lösung: Da i auf der imaginären Achse liegt, hat es Argument $\pi/2$, also ist $i = e^{\pi i/2}$ und
$$i^{-i} = e^{\pi i/2\cdot(-i)} = e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^{\pi}}\,.$$
(BENJAMIN PEIRCE (1809–1880) sagte in seinen Vorlesungen in Harvard zu dieser Formel: *Gentlemen, we have not the slightest idea what this equation means, but we may be sure that it means something very important.* Bevor wir zuviel in dieses Ergebnis hineininterpretieren, sollten wir allerdings bedenken, daß wir auch $i = e^{5\pi i/2}$ schreiben können und dann das Ergebnis $i^{-1} = e^{5\pi/2}$ bekommen *usw.* Potenzen mit komplexer Basis und nichtganzen Exponenten sind also nicht eindeutig bestimmt.)

b) Finden Sie eine komplexe Zahl z, mit $z^{12} = 1$, aber $z^n \neq 1$ für alle natürlichen Zahlen $n < 12$!

Lösung: Offensichtlich muß z den Betrag eins haben, läßt sich also darstellen in der Form $z = e^{i\varphi}$. Dann ist $1 = z^{12} = e^{12i\varphi}$, also muß 12φ ein Vielfaches von 2π sein, d.h.
$$\varphi = \frac{2k\pi}{12} = \frac{k\pi}{6} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$
Speziell im Falle $k = 1$ ist
$$\left(e^{\pi i/6}\right)^n = e^{(n/6)\pi i} \neq 1 \quad \text{für } n = 1, \dots, 11\,,$$
also ist $z = e^{\pi i/6}$ eine Lösung.

c) Wie viele verschiedene Lösungen hat die obige Aufgabe?

Lösung: Wie wir gesehen haben, läßt sich jedes z mit $z^{12} = 1$ schreiben als $z = e^{k\pi i/6}$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Wenn wir zu k ein Vielfaches von zwölf addieren, ist
$$e^{(k+12m)\pi i/6} = e^{k\pi i/16+2m\pi i} = e^{k\pi i/6}\,;$$
daher gibt es nur die zwölf verschiedenen Werte $z_k = e^{k\pi i/6}$ mit $k = 0, \dots, 11$. Für gerades k ist $6k\pi/6 = k\pi$ ein Vielfaches von 2π, also ist $z_k^6 = 1$. Für durch drei teilbares k ist entsprechend $z_k^4 = 1$. Damit kommen höchstens die Werte $k = 1, 5, 7$ und 11 in Frage. z_1 ist eine Lösung, und damit auch $z_{11} = 1/z_1$. Das kleinste durch 12 teilbare Vielfache von 5 ist 60, also ist auch z_5 eine Lösung und damit auch $z_7 = 1/z_5$. Es gibt also vier verschiedene Lösungen.

d) Drücken Sie die Funktionen $\sin kx \cos \ell x$ für $k, \ell \in \mathbb{R}$ aus als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin rx$!

Lösung: Nach den EULERschen Formeln ist
$$\begin{aligned}\sin kx \cos \ell x &= \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \cdot \frac{e^{i\ell x} + e^{-i\ell x}}{2} = \frac{e^{i(k+\ell)x} - e^{-i(k+\ell)x} + e^{i(k-\ell)x} - e^{-i(k-\ell)x}}{4i} \\ &= \frac{\sin(k+\ell)x + \sin(k-\ell)x}{2}\,.\end{aligned}$$

e) Eine Boeing 727 braucht zum Abheben eine Geschwindigkeit von mindestens 200 Meilen pro Stunde; sie kann aus dem Stand innerhalb von 30 Sekunden auf diese Geschwindigkeit beschleunigen. Falls Sie von einer konstanten Beschleunigung (d.h. einer linear ansteigenden Geschwindigkeit) ausgehen: Wie lange (in Meilen) muß die Startbahn mindestens sein?

Lösung: 200 Meilen pro Stunde sind 200 Meilen pro 3600 Sekunden, also eine Meile pro 18 Sekunden. Wenn die Geschwindigkeit $v(t)$ innerhalb von 30 Sekunden von Null auch 1/18 Meile pro Sekunde ansteigt, ist nach t Sekunden $v(t) = \dfrac{t}{30 \cdot 18}$ Meilen pro Sekunde. Der innerhalb von 30 Sekunden zurückgelegte Weg ist somit

$$\int_0^{30} \frac{t}{30 \cdot 18}\, dt = \frac{t^2}{2 \cdot 30 \cdot 18}\bigg|_0^{30} = \frac{30^2}{2 \cdot 30 \cdot 18} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \text{ Meilen}\,.$$

Die Startbahn muß also mindestens eine Länge von 5/6 Meilen (plus Sicherheitszuschlag) haben.

f) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^x u\, du$ als Grenzwert der Fläche unter geeigneten Treppenfunktionen!

Lösung: Unterteilen wir das Intervall $[0, x]$ in n Teilintervalle der Länge x/n und werten die Funktion jeweils am linken Intervallende aus, erhalten wir als Fläche unterhalb dieser Treppenfunktion

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{kx}{n} \cdot \frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{x^2}{2} \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\,.$$

Für $n \to \infty$ geht das gegen $\dfrac{x^2}{2}$.

g) Was ist $\displaystyle\int (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)\, dx$?

Lösung: Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ ist. Da x^n die Ableitung nx^{n-1} hat, ist x^n/n eine Stammfunktion von x^{n-1} (falls $n \neq 0$), also ist

$$\int (x^3 + 2x^2 + 2x + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C\,.$$

h) Was ist $\displaystyle\int \cos(3x + 5)\, dx$?

Lösung: Wir suchen eine Funktion, deren Ableitung $\cos(3x + 5)$ ist. Die Ableitung von $\sin(3x + 5)$ ist $3\cos(3x + 5)$; wegen der Linearität von Differentiation und Integration ist also

$$\int \cos(3x + 5)\, dx = \frac{\sin(3x + 5)}{3} + C\,.$$

i) Was ist $\displaystyle\int xe^x\, dx$?

Lösung: Hier lohnt sich ein Versuch mit der Regel zur partiellen Integration

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx\,.$$

Mit $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$ können wir auch $v(x) = e^x$ setzen und $u'(x)$ ist konstant gleich eins. Die obige Regel führt daher auf die Gleichung

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\,.$$

j) Berechnen Sie $\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx$ durch partielle Integration und, unabhängig davon, über die EULERschen Formeln!

Lösung: Wenn wir die Regel zur partiellen Integration anwenden, müssen wir (mit den Bezeichnungen der letzten Aufgabe) $u(x) = v'(x) = \sin x$ setzen. Damit ist $u'(x) = \cos x$ und $v(x) = -\cos x$. (Da wir mit möglichst einfachen Funktionen rechnen wollen, setzen wir die Integrationskonstante natürlich auf Null.) Somit ist

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx\,.$$

Nun ist $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, also

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx = -\sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx\,.$$

Die Stammfunktion der Eins ist $x + C$; setzen wir dies ein und bringen das Integral links auf die rechte Seite, bekommen wir die Gleichung

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + x + C\,,\ \text{ d.h. }\quad \int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \sin x\cos x}{2} + C^*\,.$$

mit der Integrationskonstante $C^* = C/2$.
Wenn wir die EULERschen Formeln verwenden, berechnen wir zunächst den Integranden als

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\,.$$

Damit ist

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\,.$$

Da (nach der Additionsformel für den Sinus oder direkt nach den EULERschen Formeln) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ist, stimmen die beiden Ergebnisse überein.

k) Zeigen Sie, daß für jede natürliche Zahl k gilt:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin kx\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos kx\,dx = 0\,!$$

Lösung: $\int \sin kx\,dx = \dfrac{-\cos kx}{k} + C$ und $\int \cos kx\,dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$ sind beide periodisch mit Periode 2π. (Für $k > 1$ ist das natürlich nicht die kleinste Periode!). Damit nimmt die Stammfunktion am oberen wie am unteren Ende des Integrationsintervalls denselben Wert an, das Integral verschwindet also.

l) Gilt dies auch für beliebige *ganze* Zahlen k und ℓ?

Lösung: Mit negativen Zahlen gibt es keine Probleme, denn

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin x\,,$$

so daß wir die entsprechenden Integrale sofort auf solche mit $k \in \mathbb{N}$ zurückführen können. Für $k = 0$ allerdings ist $\cos kx = 1$, und wenn wir diese konstante Funktion von Null bis 2π integrieren, erhalten wir den Wert $2\pi \neq 0$. Mit dem Sinus dagegen gibt es keinbe Probleme, denn $\sin(0x) = 0$.

m) Zeigen Sie: Für zwei natürliche Zahlen k, ℓ gilt stets

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos \ell x \, dx = 0 \, .$$

Lösung: Wir wir bei Aufgabe *d)* gesehen haben, ist

$$\sin kx \cos \ell x \, dx = \frac{1}{2}\big(\sin(k+\ell)x + \sin(k-\ell)x\big) \, dx \, .$$

Wenn wir dies von Null bis 2π integrieren, erhalten wir nach den vorigen beiden Aufgaben für beide Summanden den Wert Null.