Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. November – 2. Dezember 2009

a) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ können Sie sicher sein, daß gilt

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100} \;?$$

Lösung: Nach dem Satz über die Taylor-Entwicklung ist

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + e^{\eta} \frac{1}{(n+1)!}$$

mit einer reellen Zahl $\eta \in (0, 1)$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist hier $e^{\eta} < e < 3$. Wir müssen daher ein n finden mit $3/(n+1)! < 1/100$ oder $(n+1)! > 300$. Da $5! = 120$ und $6! = 720$ ist, genügt $n = 5$.

b) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n} \;!$$

Lösung: Nach der Summenformel für geometrische Reihen ist

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} \,.$$

c) Liefert das bei *a)* ein besseres Ergebnis?

Lösung: Nach der gerade bewiesenen Ungleichung ist

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!} \,.$$

Für $n = 4$ ist $4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$, was leider nicht ganz ausreicht. Tatsächlich approximiert

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{163}{60} = 2{,}708\overline{3}$$

e sogar deutlich besser, aber das können wir mit unseren *a priori*-Abschätzungen nicht zeigen.

d) Schreiben Sie $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}$

Lösung: Für jede natürliche Zahl n ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \,.$$

Die linke Seite läßt sich als Bruch $z_n/n!$ schreiben. Nach der vorigen Aufgabe ist

$$e - \frac{z_n}{n!} < \frac{1}{n!}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!} \,.$$

e) Folgern Sie, daß e eine irrationale Zahl ist!

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!} .$$

Wäre $e = p/q$ eine rationale Zahl, so gäbe es eine natürliche Zahl n, für die q Teiler von $n!$ ist, z.B. q selbst. Damit ließe sich e als Bruch mit Nenner $n!$ schreiben, was nach obiger Ungleichung unmöglich ist.

f) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2} .$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k !

Lösung: Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Da a_0 verschwindet, ist

$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

und

$$x^2 R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k .$$

Somit ist

$$2xR(x) + x^2R(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (2a_{k-1} + a_{k-2}) x^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

und damit $R(x) = a_0 + a_1 x + 2xR(x) + x^2R(x) = 2x + (2x + x^2)R(x)$.
Dies können wir nach $R(x)$ auflösen und erhalten die Gleichung

$$R(x) = \frac{2x}{1 - 2x - x^2} .$$

Die Nullstellen des Nenners sind die des Polynoms $x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$, also $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Da der konstante Term -1 das Produkt der beiden Nullstellen ist, folgt $x_1x_2 = -1$. Damit ist der Nenner von $R(x)$

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 &= -(x - x_1)(x - x_2) = \frac{x - x_1}{x_1}\frac{x - x_2}{x_2} = \left(\frac{x}{x_1} - 1\right)\left(\frac{x}{x_2} - 1\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) = \left(1 - \frac{x}{-1 + \sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{x}{-1 - \sqrt{2}}\right) \\ &= \big(1 - (1 + \sqrt{2})x\big)\big(1 - (1 - \sqrt{2})x\big) . \end{aligned}$$

Wir versuchen daher, $R(x)$ darzustellen in der Form

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{2x}{1 - 2x - x^2} &= \frac{c}{1 - (1 + \sqrt{2})x} + \frac{d}{1 - (1 - \sqrt{2})x} \\ &= \frac{c\big(1 - (1 - \sqrt{2})x\big) + d\big(1 - (1 + \sqrt{2})x\big)}{1 - 2x - x^2} = \frac{(c + d) - \big(c(1 - \sqrt{2}) + d(1 + \sqrt{2})\big)x}{1 - 2x - x^2} . \end{aligned}$$

Somit muß $c + d = 0$ sein, also $d = -c$ und

$$c(1 - \sqrt{2}) - c(1 + \sqrt{2}) = -2c\sqrt{2} = 2\,, \text{ also } \quad c = -\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist damit

$$\frac{2x}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \sqrt{2})^k x^k - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \sqrt{2})^k - (1 - \sqrt{2})^k}{\sqrt{2}} x^k .$$

Somit sollte
$$a_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{\sqrt{2}}$$
sein, und in der Tat ist dies für $k=0$ die Null; für $k=1$ ist
$$\frac{(1+\sqrt{2})^1 - (1-\sqrt{2})^1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\,.$$

Da x_1 und x_2 die Gleichung $x^2+2x-1=0$ erfüllen, gilt für ihre Kehrwerte
$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-1=0 \quad\text{oder}\quad 1+2x-x^2=0 \quad\text{oder}\quad x^2=2x+1\,.$$

Damit ist auch $x^k = 2x^{k-1}+x^{k-2}$, und daraus folgt, daß obiger Ausdruck auch die Rekursionsformel $a_k = 2a_{k-1}+a_{k-2}$ erfüllt.

Tatsächlich kann man den Ausdruck noch etwas vereinfachen, denn $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1 < \frac{1}{2}$, so daß a_k einfach die nächste ganze Zahl zu $(1+\sqrt{2})^k/\sqrt{2}$ ist.

g) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen
$$a_0=3,\quad a_1=5 \quad\text{und}\quad a_k = a_{k-1}-a_{k-2}\,.$$

Was ist $a_{1\,000\,000}$?

Lösung: Wir betrachten, zunächst noch ohne jede Berücksichtigung von Konvergenzproblemen, die Potenzreihe
$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,.$$

Zunächst ist
$$xR(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = 3x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^k$$
und
$$x^2R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k\,.$$
Somit ist
$$xR(x)-x^2R(x) = 3x + \sum_{k=2}^{\infty}(a_{k-1}-a_{k-2})x^k = 3x+\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$
und damit $R(x) = 3+5x+\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 3+2x+(x-x^2)R(x)$.
Dies können wir nach $R(x)$ auflösen und erhalten die Gleichung
$$R(x) = \frac{2x+3}{1-x+x^2}\,.$$

Der Nenner $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, hat die Nullstellen $x_{1/2} = \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Da der konstante Term 1 das Produkt der beiden Nullstellen ist, folgt $x_1x_2=1$. (Studenten mit gutem Gedächtnis erinnern sich vielleicht daran, daß x_1 und x_2 die beiden komplexen Lösungen der Gleichung $x^3=-1$ sind.) Damit läßt sich der Nenner von $R(x)$ schreiben als
$$\begin{aligned}1-2x-x^2 &= (x-x_1)(x-x_2) = \frac{x-x_1}{x_1}\,\frac{x-x_2}{x_2} = \left(\frac{x}{x_1}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}-1\right)\\ &= \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right) = \left(1-\frac{2x}{1+\sqrt{-3}}\right)\left(1-\frac{2x}{1-\sqrt{-3}}\right)\\ &= \left(1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x\right)\,.\end{aligned}$$
Wir versuchen daher, $R(x)$ darzustellen in der Form
$$R(x) = \frac{2x+3}{x^2-x+1} = \frac{c}{1-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})x} + \frac{d}{1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})x}\,.$$

Nach der Summenformel für die geometrische Reihe ist dann

$$\frac{2x+3}{x^2-x+1} = c\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k + d\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k x^k .$$

Somit sollte

$$a_k = c\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^k + d\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^k$$

sein.

Der Inhalt der Klammern, die potenziert werden, ist in beiden Fällen eine Zahl, deren dritte Potenz -1 ist; falls diese Formel stimmt, ist also $a_{k+3} = -a_k$ und $a_{k+6} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies können wir leicht nachprüfen, wenn wir a_k für kleiner Werte von k nach der Rekursionsformel berechnen: $a_2 = a_1 - a_0 = 5-3 = 2$, $a_3 = a_2 - a_1 = 2-5 = -3 = -a_0$ und $a_4 = a_3 - a_2 = -3-2 = -5 = -a_1$. Wegen der Linearität der Rekursion ist damit $a_{k+3} = -a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Da $1\,000\,000 : 6 = 166\,666$ Rest 4 ist, folgt $a_{1\,000\,000} = a_4 = -a_1 = -3$.

h) Die Funktion f erfülle die Gleichung $f''(x) = -100f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; außerdem sei $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$. Was wissen Sie über $f(x)$?

Lösung: Wegen der Beziehung $f''(x) = -100f(x)$ muß es nach dem Satz aus der Vorlesung reelle Zahlen a, b geben, so daß $f(x) = a\sin 10x + b\cos 10x$ ist. Dann ist

$$f'(x) = 10a\cos 10x - 10b\sin 10x, \quad f''(x) = -100a\sin 10x - 100b\cos 10x$$

und $f'''(x) = -1000a\cos 10x + 1000b\sin 10x$.

Die Bedingungen $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$ bedeuten also, daß $-100b = 1000$ und $-1000a = 0$ sein muß. Somit ist $f(x) = -10\cos 10x$.

i) Drücken Sie $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ aus durch Funktionen der Form $\sin ax$ und $\cos bx$!

Lösung:

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

j) Drücken Sie $\sin 3x$ aus als Polynom in $\sin x$ und $\cos x$!

Lösung: $\sin 3x$ ist der Imaginärteil von

$$e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\,\sin x - 3\cos x\,\sin^2 x - i\sin^3 x .$$

Somit ist $\sin 3x = 3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x$. Mit der Beziehung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ läßt sich das noch vereinfachen zu $\sin 3x = 3(1-\sin^2 x)\,\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

k) Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom nur in $\cos x$!

Lösung: Nach der vorigen Aufgabe ist

$\cos 3x = \mathfrak{Re}\, e^{3ix} = \cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\,(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

l) Zeigen Sie: Für jeden Winkel φ genügt $z = \cos\frac{\varphi}{3}$ der kubischen Gleichung

$$4z^3 - 3z = \cos\varphi\,!$$

Lösung: Mit $x = \frac{\varphi}{3}$ ist nach der vorigen Lösung

$$\cos\varphi = \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4z^3 - 3z .$$

m) Zeigen Sie: Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend!

Lösung: Ein Punkt P, dessen Radius $\overline{OP}$ mit der x-Achse einen Winkel φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ einschließt, hat eine positive x-Koordinate, also ist $\cos\varphi > 0$. Da der Kosinus die Ableitung des Sinus ist, folgt dessen strenge Monotonie.

n) Der Arkussinus $\arcsin x$ sei die Umkehrfunktion der Einschränkung des Sinus auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Zeigen Sie, daß er für alle $x \in [-1, 1]$ erklärt ist und berechnen Sie seine Ableitung im Intervall $(-1, 1)$!

Lösung: Die Sinusfunktion bildet das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ injektiv ab auf $[-1, 1]$; es gibt somit eine Umkehrfunktion. Wegen der Monotonie werden auch die entsprechenden offenen Intervalle aufeinander abgebildet, und nach der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist deren Ableitung im Punkt $y = \sin x$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

da $\cos x$ im fraglichen Intervall nicht negativ wird.