WOLFGANG K. SEILER   A5, ZIMMER C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. November – 2. Dezember 2009

a) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ können Sie sicher sein, daß gilt
$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{100}\ ?$$

b) Zeigen Sie durch Abschätzung mit einer geometrischen Reihe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}\ !$$

c) Liefert das bei *a)* ein besseres Ergebnis?

d) Schreiben Sie $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{z_n}{n!}$ als Bruch mit Nenner $n!$, und zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{z_n}{n!} < e < \frac{z_n + 1}{n!}$

e) Folgern Sie, daß e eine irrationale Zahl ist!

f) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen
$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}\,.$$
Finden Sie eine geschlossene Formel für a_k !

g) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch die Bedingungen
$$a_0 = 3, \quad a_1 = 5 \quad \text{und} \quad a_k = a_{k-1} - a_{k-2}\,.$$
Was ist $a_{1\,000\,000}$?

h) Die Funktion f erfülle die Gleichung $f''(x) = -100f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; außerdem sei $f''(0) = 1000$ und $f'''(0) = 0$. Was wissen Sie über $f(x)$?

i) Drücken Sie $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ aus durch Funktionen der Form $\sin ax$ und $\cos bx$!

j) Drücken Sie $\sin 3x$ aus als Polynom in $\sin x$ und $\cos x$!

k) Drücken Sie $\cos 3x$ aus als Polynom nur in $\cos x$!

l) Zeigen Sie: Für jeden Winkel φ genügt $z = \cos \frac{\varphi}{3}$ der kubischen Gleichung
$$4z^3 - 3z = \cos \varphi\ !$$

m) Zeigen Sie: Im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend!

n) Der Arkussinus $\arcsin x$ sei die Umkehrfunktion der Einschränkung des Sinus auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Zeigen Sie, daß er für alle $x \in [-1, 1]$ erklärt ist und berechnen Sie seine Ableitung im Intervall $(-1, 1)$!