Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23–25. November 2009

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x^5 + x + 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist!

Lösung: $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und eine Funktion mit positiver erster Ableitung ist streng monoton wachsend.

b) Welche Ableitung hat die Umkehrfunktion g von f im Punkt $f(2) = 35$?

Lösung: $g(35) = 2$ und $g'(35) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \dfrac{1}{81}$.

c) Wo hat g lokale Maxima und Minima?

Lösung: Nirgends, denn $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ kann nirgends verschwinden.

d) Wo ist f konvex, wo konkav?

Lösung: $f''(x) = 20x^3$ ist negativ für $x < 0$ und positiv für $x > 0$; somit ist x konkav auf $(-\infty, 0)$ und konvex auf $(0, \infty)$.

e) Ist die Logarithmusfunktion konvex oder konkav auf $(0, \infty)$?

Lösung: Die Ableitung von $\log x$ ist $1/x$, die Ableitung davon $-1/x^2$, was überall negativ ist. Somit ist die Logarithmusfunktion konkav.

f) Wie sieht es aus mit der Exponentialfunktion?

Lösung: Da diese auch gleich ihrer zweiten Ableitung ist und außerdem nur positive Werte annimmt, ist sie konvex über ganz $\mathbb{R}$.

g) Was ist $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$?

Lösung: Für $x = 1$ verschwinden sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs; nach der Regel von de l'Hôpital ist daher

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x}{5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{3} = 1\,.$$

h) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$!

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist nach der Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,,$$

denn e^x wächst unbeschränkt für $x \to \infty$.

Ist die Behauptung für ein festes n bewiesen, so können wir den Grenzwert für $n+1$ nach de l'Hôpital berechnen als

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+1} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1) \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

nach Induktionsannahme. Somit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M_n \in \mathbb{R}$, so daß $e^x > x^n$ für alle $x > M_n$.

Lösung: Da $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ ist, gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{R}$, so daß $x^n e^{-x} < \varepsilon = 1$ ist für alle $x > N$, also auch $x^n < e^x$. Mit $M_n = N$ gilt also die Behauptung.

j) Was ist $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\log x$?

Lösung: Nach der Regel von DE L'HÔPITAL ist

$$\lim_{x\searrow 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\searrow 0} -2\sqrt{x} = 0\,.$$

k) Zeigen Sie: Die n-te Ableitung von x^n ist $n!$.

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist zu zeigen, daß die Ableitung von $f(x) = x$ gleich eins ist; das stimmt offensichtlich.
Wenn wir für ein festes n wissen, daß die n-te Ableitung von x^n gleich $n!$ ist, können wir die $(n+1)$-te Ableitung von $f(x) = x^{n+1}$ berechnen als die n-te Ableitung von $f'(x) = (n+1)x^n$, und das ist nach Induktionsannahme $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$.

l) Berechnen Sie die TAYLOR-Reihe der Funktion $f(x) = x^3$ um $x = 1$!

Lösung: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$; alle höheren Ableitungen verschwinden identisch. Somit hat die TAYLOR-Reihe nur vier Summanden:

$$f(1+h) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 = (1+h)^3\,.$$

m) Bestimmen Sie die TAYLOR-Reihe von $f(x) = e^{-x^2}$ um den Nullpunkt!

Lösung: Für alle $u \in \mathbb{R}$ ist $e^u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$; also ist

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

n) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom fünften Grades von $f(x) = \sqrt{x}$ um $x = 1$!

Lösung: Zunächst müssen wir die Ableitungen von f berechnen; dazu arbeiten wir am besten mit der Darstellung $f(x) = x^{1/2}$:

$$f'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2},\quad f''(x) = -\frac{x^{-3/2}}{4},\quad f'''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{8},\quad f^{(4)}(x) = -\frac{15x^{-7/2}}{16},\quad f^{(5)}(x) = \frac{105x^{-9/2}}{32}\,.$$

An der Stelle $x = 1$ sind alle x-Potenzen gleich eins; außerdem müssen die Ableitungen noch dividiert werden durch die Fakultäten

$$1! = 1,\quad 2! = 2,\quad 3! = 6,\quad 4! = 24 \quad\text{und}\quad 5! = 120\,,$$

also ist

$$T_{f,1,5}(h) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} - \frac{5h^4}{128} + \frac{7h^5}{256}\,.$$