WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16–18. November 2009

a) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$ ist differenzierbar in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lösung: *Richtig:* In der Umgebung eines Punkts $x_0 > 0$ stimmt $f(x)$ mit der Polynomfunktion x^2 überein, in der Umgebung eines Punkte $x_0 < 0$ mit der Polynomfunktion $-x^2$. Bleibt also höchstens der Punkt $x_0 = 0$ als potentielles Problem. In dessen Umgebung ist

$$f(x_0 + h) = \begin{cases} h^2 & \text{falls } h \geq 0 \\ -h^2 & \text{falls } h \leq 0 \end{cases} = f(0) + 0 \cdot h + h \cdot |h| \; .$$

Da die Betragsfunktion stetig ist und für $h = 0$ den Wert null annimmt, ist f auch im Nullpunkt differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$.

b) Welche Ableitung hat diese Funktion f?

Lösung: Für $x > 0$ ist $f'(x) = 2x$, für $x < 0$ ist $f'(x) = -2x$ und für $x = 0$ ist $f'(0) = 0$. Kompakt ausgedrückt ist also $f'(x) = 2\,|x|$.

c) Finden Sie für die folgenden Funktionen die größte offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, auf denen sie definiert sind, und berechnen Sie dort die Ableitung!

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = 2^{2^x}, \quad k(x) = \log(4 - x^2), \quad \ell(x) = \log_{10} x\,!$$

Lösung: Die Funktion f ist eine rationale Funktion, also überall dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet. Somit ist $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Die Ableitung dort kann nach der Quotientenregel berechnet werden:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \; .$$

g ist als Hintereinanderausführung einer Exponentialfunktion und eines Polynoms auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar; die Ableitung errechnet sich nach der Kettenregel zu $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

h ist die Hintereinanderausführung der Funktion $x \mapsto 2^x$ mit sich selbst; untersuchen wir also zunächst diese Funktion. $2^x = e^{x \log 2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel (oder laut Vorlesung) die Ableitung $\log 2 \cdot 2^x$. Damit ist auch h auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat nach der Kettenregel die Ableitung

$$h'(x) = \log 2 \cdot 2^{2^x} \cdot \log 2 \cdot 2^x = (\log 2)^2\, 2^{2^x} \cdot 2^x \; .$$

k entsteht durch Einsetzen eines Polynoms in die Logarithmusfunktion; da letztere nur für positive Werte von x definiert ist, muß x so gewählt werden, daß $2 - x^2 > 0$ ist, d.h. $D = (-2, 2)$. Für x aus diesem offenen Intervall errechnet sich die Ableitung nach der Kettenregel zu

$$k'(x) = \frac{1}{2-x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2-2} \; .$$

Der Logarithmus zur Basis 10, schließlich, unterscheidet sich vom natürlichen Logarithmus nur um eine Konstante, ist also wie dieser auf der Menge D aller positiver reeller Zahlen definiert. Da

$$\ell(x) = \log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10} \quad \text{ist, folgt} \quad \ell'(x) = \frac{1}{x \log 10} \; .$$

d) Berechnen Sie über die Formel $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ Näherungswerte für die Zahlen

$$x_1 = \sqrt{10} = \sqrt{9+1}, \quad x_2 = \sqrt[10]{e} = e^{0,1} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{101} = \frac{1}{100+1}\,!$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{9+1} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 3\frac{1}{6} = 3{,}1\overline{6} \\ x_2 &= e^{0+0,1} \approx e^0 + 0{,}1e^0 = 1{,}1 \\ x_3 &= \frac{1}{100+1} \approx \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2} = 0{,}0099 \end{aligned}$$

Korrekte *bzw.* auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte sind

$$x_1 \approx 3{,}16228, \quad x_2 \approx 1{,}10517 \quad \text{und} \quad x_3 = 0{,}\overline{0099}\,.$$

e) Ein Student habe zum Zeitpunkt $t = 0$ der Modulklausur seinen maximalen Wissenstand in Analysis I erreicht. Wenn man davon ausgeht, daß er einen gewissen Bruchteil β davon nie wieder vergißt, erfüllt der Anteil $w(t)$, den er zur Zeit t nach der Prüfung noch beherrscht, nach dem deutschen Psychologen HERMANN EBBINGHAUS (1850–1909) die Gleichung $w'(t) = -\gamma \cdot \big(w(t) - \beta\big)$ mit einem $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $w(t)$!

Lösung: Wie wir wissen, muß eine Funktion $y(t)$, für die $y'(t) = ay(t)$ ist, ein Vielfaches der Exponentialfunktion e^{at} sein. Hier haben wir eine ähnliche Gleichung; was stört, ist allerdings der Summand $-\beta$. Nun hat aber eine Konstante die Ableitung null; wenn wir die neue Funktion $y(t) = w(t) - \beta$ betrachten, ist daher

$$y'(t) = w'(t) = -\gamma\, y(t), \quad \text{also} \quad y(t) = Ce^{-\gamma t}\,.$$

Somit ist $w(t) = \beta + Ce^{-\gamma t}$. Dabei muß die Konstante C so bestimmt werden, daß $w(0) = \beta + C = 100\%$ ist, d.h. $C = 1 - \beta$.

f) Für einen speziellen Studenten sei $\beta = 10\%$ und $w(1\,\text{Jahr}) = 60\%$. Welchen Teil seiner Kenntnisse hat er (ohne zusätzliches Lernen) bis zum Wiederholungstermin nach einem halben Jahr vergessen?

Lösung: In diesem Fall ist C gleich 90% und $w(t) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma t}$. Außerdem ist, wenn wir die Zeit in Jahren messen,

$$w(1) = 0{,}1 + 0{,}9e^{-\gamma} = 0{,}6 \Longrightarrow e^{-\gamma} = \frac{5}{9} \Longrightarrow \gamma = -\ln\frac{5}{9} \approx 0{,}5877866648\,.$$

Mithin ist $w(\frac{1}{2}) = 0{,}1 + 0{,}9e^{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{9}} = 0{,}1 + 0{,}9e^{\ln\sqrt{\frac{5}{9}}} = 0{,}1 + 0{,}9\sqrt{\frac{5}{9}} \approx 0{,}7708203933$ ungefähr 77%. Er hat also bis zum Wiederholungstermin etwa 23% des gelernten Stoffs vergessen.

g) Ein Erwachsener atmet etwa 16 Mal pro Minute je einen halben Liter Luft ein; die ausgeatmete Luft enthält 20% weniger Sauerstoff als die eingeatmete. Angenommen, 30 Studenten sitzen in einem nicht gelüfteten Seminarraum von $40\,\text{m}^3$, dessen Luft anfänglich 20% Sauerstoff enthält. Wieviel enthält sie noch nach 90 Minuten?

Lösung: Da die Zahlen ohnehin nur ungefähr stimmen, müssen wir nicht unbedingt mit der hier kleinstmöglichen Zeiteinheit von $1/16$ Minute rechnen, sondern können, ohne großen Einfluß auf das Ergebnis, mit vollen Minuten rechnen, wodurch sich angenehmere Zahlen ergeben.

Der Seminarraum enthält $V = 40\,\mathrm{m}^3$ Luft, dessen Sauerstoffanteil zur (in Minuten gemessenen) Zeit t gleich $y(t)$ sei. Jede Minute werden

$$30 \times 16 \times \frac{1}{2} = 240$$

Liter Luft eingeatmet; da Tausend Liter gleich einem Kubikmeter sind, ist das in Bezug auf das Gesamtvolumen ein Anteil von $\frac{240}{40000} = \frac{6}{1000}$. Vorher war das Sauerstoffvolumen $y(t)V$; nachher ist es

$$\frac{6}{1000} \cdot \frac{8}{10} y(t)V + \frac{994}{1000} y(t)V = \frac{48 + 9940}{10000} y(t)V = \frac{9988}{10000} y(t)V\,,$$

da der Sauerstoffgehalt der nicht eingeatmeten Luft natürlich konstant bleibt. Damit sinkt der Sauerstoffgehalt pro Minute um $\frac{12}{10000} y(t)$, d.h.

$$\dot{y}(t) = -\frac{12}{10000} y(t) \quad \text{und} \quad y(t) = Ce^{-\frac{12}{10000}} y(t)\,.$$

Der Vorfaktor ist $C = y(0) = 20\%$ und

$$y(90) = \frac{1}{5} e^{-\frac{12 \cdot 90}{10000}} = \frac{1}{5} e^{-\frac{108}{1000}} \approx 0{,}1795255193\,.$$

Der Sauerstoffgehalt ist also auf knapp 18% gesunken.

h) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$! Um welche Art von Extrema handelt es sich jeweils?

Lösung: Die Ableitung von e^{-x^2} ist nach der Kettenregel $-2xe^{-x^2}$, die von $f(x)$ also nach der LEIBNIZschen Produktregel

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) = 2(x - x^3)e^{-x^2}\,.$$

Da die Exponentialfumktion nur positive Werte annimmt, kann dieser Ausdruck nur verschwinden, wenn $(x - x^3) = x(1 + x)(1 - x)$ verschwindet, also für $x = 0$ und $x = \pm 1$. Für $x = 0$ ist $f(x) = 0$; da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kann bei $x = 0$ nur ein Minimum vorliegen; da $f'(x)$ für $0 < |x| < 1$ positiv ist, steigt die Funktion von dort bis zu den Punkten mit $x = \pm 1$; danach wird $f'(x)$ negativ. Somit müssen bei ± 1 Maxima liegen.