Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 9–11. November 2009

a) Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

Lösung: f ist genau dann stetig in x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Das ist aber genau die Bedingung aus der Grenzwertdefinition, die sagt, daß $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

b) Richtig oder falsch: Wenn die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, gibt es Punkte $x_m, x_M \in \mathbb{R}$, so daß $f(x_m)$ das Infimum und $f(x_M)$ das Supremum der Funktionswerte ist.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist das Infimum der Funktionswerte von
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
die Null, aber es gibt kein $x_m \in \mathbb{R}$ mit $f(x_m) = 0$.

c) Die stetige Funktionn $f\colon D \to \mathbb{R}$ bilde das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ auf sich selbst ab. Zeigen Sie, daß es mindestens einen Punkt $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

Lösung: Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, haben wir einen Fixpunkt gefunden. Andernfalls ist $f(a) > a$ und $f(b) < b$, die Funktion $g(x) = f(x) - x$ ist also positiv für $x = a$ und negativ für $x = b$. Dazwischen gibt es eine Nullstelle, d.h. einen Punkt x mit $f(x) = x$.

d) Zeigen Sie: Jedes Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Lösung: Wenn wir das Polynom f ersetzen durch $-f$, ändert sich nichts an den Nullstellen; wir können uns daher beschränken auf den Fall, daß der Koeffizient des höchsten Terms positiv ist. Dann wächst $f(x)$ für $x \to \infty$ unbeschränkt; es gibt also insbesondere ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) > 1$. Für $x \to -\infty$ geht auch $f(x) \to -\infty$, es gibt also auch ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < -1$. Im Intervall zwischen a und b hat f dann mindestens eine Nullstelle.

e) Geben Sie ein Polynom vom Grad vier an, das keine reelle Nullstellen hat!

Lösung: $x^4 + 1$, $(x^2 + x + 1)^2 + 1$, $\ldots$

f) Zeigen Sie: Die Gleichung $e^x = x^2$ hat mindestens eine reelle Lösung x mit $|x| \le 1$.

Lösung: Für $x = 1$ ist $e^x - x^2 = e - 1 > 0$, für $x = -1$ ist $e^x - x^2 = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Also muß es dazwischen mindestens eine Nullstelle geben.

g) Richtig oder falsch: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn die laut Vorlesung konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist eine konvergente Majorante.

h) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{12}{k^2-4}\,!$$

Lösung:
$$\frac{12}{k^2-4} = \frac{12}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{k-2} - \frac{3}{k+2}\,;$$
deshalb ist
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{12}{x^2-4} = \sum_{k=3}^{n} \frac{3}{k-2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{3}{k+2} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{3}{k}\,.$$
Hier heben sich die mittleren Summanden weg; übrig bleibt
$$\frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} - \sum_{k=n-1}^{n+2} \frac{3}{k}\,.$$

Die letzte Summe geht gegen Null für $n \to \infty$, denn wir können sie für $n \geq 2$ beispielsweise durch $12/(n-1)$ nach oben abschätzen. Somit ist der Grenzwert die Summe der ersten vier Summanden, also $6\frac{1}{4}$.

i) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$?

Lösung: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Summanden ist
$$\frac{(k+1)/2^{k+1}}{k/2^k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\,.$$

Die Folge dieser Zahlen konvergiert gegen $1/2$, also konvergiert die betrachtete Summe nach dem Quotientenkriterium.

j) $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sei die n-te Teilsumme der harmonischen Reihe. Zeigen Sie, daß die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$$
konvergiert!

Lösung: Natürlich ist $H_n \leq n$; daher ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (siehe vorige Aufgabe) eine konvergente Majorante.

k) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.

Lösung: *Richtig,* denn die Folge der Zahlen $1/\sqrt{k}$ ist eine momoton fallende Nullfolge, so daß wir das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen anwenden können.