Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 9–11. November 2009

a) Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

b) *Richtig oder falsch:* Wenn die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt ist, gibt es Punkte $x_m, x_M \in \mathbb{R}$, so daß $f(x_m)$ das Infimum und $f(x_M)$ das Supremum der Funktionswerte ist.

c) Die stetige Funktionn $f\colon D \to \mathbb{R}$ bilde das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ auf sich selbst ab. Zeigen Sie, daß es mindestens einen Punkt $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = x$.

d) Zeigen Sie: Jedes Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

e) Geben Sie ein Polynom vom Grad vier an, das keine reelle Nullstellen hat!

f) Zeigen Sie: Die Gleichung $e^x = x^2$ hat mindestens eine reelle Lösung x mit $|x| \le 1$.

g) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+k^2}$ konvergiert.

h) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{12}{k^2-4}\,!$$

i) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$?

j) $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sei die n-te Teilsumme der harmonischen Reihe. Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$$

konvergiert!

k) *Richtig oder falsch:* Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert.