

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 2–4. November 2009

a) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller streng monoton wachsender Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge der Menge aller stetiger Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_n = x_{n-1} + 3n - 1 \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie: $x_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n!$

c) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 - 6ix + 7 = 0!$

d) Stellen Sie die reelle Zahl $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$ möglichst einfach dar!

e) Was ist $(1 - i)^{2009}$?

f) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z^2 + \bar{z}^2$ reell.

g) Ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

h) Ist die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = (-1)^n \frac{3n+2}{2n+3}$ beschränkt? monoton? konvergent?

i) Finden Sie eine konvergente, aber nicht monotone Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$!

j) Bestimmen Sie, sofern es existiert, das Infimum sowie das Supremum der Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 < 0\}!$$

k) Drücken Sie die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2} \log x} \end{cases}$ einfacher aus! ($\mathbb{R}_{>0} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)

l) Finden Sie für die Funktion $f(x) = (100x)^2$ für $x = 0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ist, falls $|y - x| < \delta$!

m) Zeigen Sie durch direkte Rechnung: Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so auch $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3f(x)$.

n) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{e^x}$ ist stetig

o) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ ist stetig.

p) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \leq -1 \\ 2(x + 1) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ 3x + 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$ ist stetig.

q) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf dem Intervall $[-10, 10]$!

r) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \exp\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)!$

s) *Richtig oder falsch:* Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \log(n + 1) - \log n$ ist eine Nullfolge.

t) Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl $x \in [-1, 1]$ mit der Eigenschaft $e^x = x^2$