WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26–28. Oktober 2009

a) Am ersten Januar 2010 werden 1000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 2%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?

Lösung: Bei einmal jährlicher Verzinsung kommen 2% dazu, am Jahresende sind also 1020 Euro vorhanden. Bei monatlicher Verzinsung wird das Kapital mit $(1+0.02/12)^{12} \approx 1{,}020184360$ multipliziert und damit zu 1020 Euro und 18 Cent. Bei kontinuierlicher Verzinsung ist der Multiplikator $e^{0.02} \approx 1{,}020201340$, am Jahresende gibt es also 1020 Euto und 20 Cent.

b) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?

Lösung: Da $e > 1$ ist, divergiert die Folge der Zahlen e^n bestimmt gegen ∞. Da $e^{-n} = 1/e^n$ ist, folgt daraus, daß die Folge der e^{-n} eine Nullfolge ist.

c) Der *binäre Logarithmus* $y = \operatorname{lb} x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= **bi**nary digi**ts**) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r, die größer ist als $\operatorname{lb} n$.

Lösung: Ist $r \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $r-1 \le \operatorname{lb} n = \frac{\log n}{\log 2} \le r$, so ist auch $(r-1)\log 2 < \log n \le r\log 2$. Nach unseren Rechenregeln für die Exponentialfunktion ist dann auch $e^{(r-1)\log 2} < e^{\log n} \le e^{r\log 2}$, d.h. $2^{r-1} < n \le 2^r$. Diese beiden Ungleichungen werden genau von den natürlichen Zahlen n erfüllt, die r Binärziffern haben.

d) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c, so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

Lösung: Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist für eine positive reelle Zahl x

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{und} \quad \log_b x = \frac{\log x}{\log b}\,,$$

also ist $\log_b x = \frac{\log a}{\log b} \log_a x$.

e) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n\log x$.

Lösung: Für $n = 1$ ist natürlich $\log x^1 = 1 \cdot \log n$. Angenommen, die Behauptung ist bereits bewiesen für eine feste natürliche Zahl n. Dann ist

$$\log x^{n+1} = \log(x^n \cdot x) = \log x^n + \log x\,.$$

Nach Induktionsannahme ist $\log x^n = n\log x$, also

$$\log x^{n+1} = n\log x + \log x = (n+1)\log x\,,$$

wie im Induktionsschluß zu zeigen ist. Somit ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\log x^n = n\log x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen war das aber für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $n = 0$ ist $\log x^0 = \log 1 = 0$. Für negative ganze Zahlen $-n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{-n} \cdot x^n = 1$, also $\log x^{-n} + \log x^n = \log 1 = 0$. Wie bereits gezeigt, ist $\log x^n = n\log x$, also $\log x^{-n} = -n\log x$, wie behauptet.

f) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \le x - 1$!

Lösung: Nach einer der beiden definierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ist $e^y \ge 1 + y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Damit ist auch $e^{x-1} \ge x$ für alle $x \in \mathbb{R}$: Man setze einfach $y = x - 1$. Wenn die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung falsch wäre, könnten wir aus der Ungleichung $\log x > x - 1$ folgern, daß $x = e^{\log x} > e^{x-1}$ wäre, im Widerspruch zur gerade gezeigten Ungleichung. Somit ist die Behauptung richtig.

g) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier offener Teilmengen eines metrischen Raums ist selbst offen.

Lösung: D_1 und D_2 seien die beiden offenen Teilmengen des metrischen Raums X, d sei die Metrik und $x \in D_1 \cap D_2$ sei ein Punkt aus dem Durchschnitt. Da D_1 offen ist, gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, so daß alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \varepsilon_1$ in D_1 liegen; entsprechend gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \varepsilon_1$ in D_2 liegen. Ist $d(x, y) < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, liegt y daher sowohl in D_1 als auch in D_2, also im Durchschnitt $D_1 \cap D_2$. Dies zeigt, daß $D_1 \cap D_2$ eine offene Menge ist.

h) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist $0 \in \mathbb{R}$, aber unter den $z \in \mathbb{C}$ mit $d(0, z) = |z| < \varepsilon$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ auch die komplexe Zahl $i\varepsilon/2$, die nicht in $\mathbb{R}$ liegt. Somit kann $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ nicht offen sein.

i) Richtig oder falsch: $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Lösung: *Richtig,* denn ist $z \in D$, so ist $|z| < 1$, es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß $|z| = 1 - \varepsilon$ ist. Für eine komplexe Zahl w mit $|z - w| < \varepsilon$ ist dann nach der Dreiecksungleichung

$$|w| = |z + (w - z)| \le |z| + |z - w| < 1 - \varepsilon + \varepsilon = 1\,,$$

also liegt auch w in der Menge D.

j) Richtig oder falsch: $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \le 1 \right\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise liegt die Eins in D. Gäbe es aber eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \varepsilon$ in D lägen, so müßte insbesondere $1 + \varepsilon/2$ dort liegen, was nicht der Fall ist.

k) Die GAUSS-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \le x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?

Lösung: Ist x eine ganze Zahl, so ist $f(x) = [x] = x$. Für eine reelle Zahl y mit $x - 1 < y < x$ ist $f(y) = x - 1$, für y mit $x \le y < x + 1$ aber ist $f(y) = x$. Damit kann die Funktion an diesen Stellen nicht stetig sein: Sonst müßte es beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ geben, so daß $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ wäre für alle y mit $|x - y| < \delta$. Ist aber η irgendeine positive reelle Zahl, die echt kleiner als δ ist, so erfüllt $y = x - \eta$ zwar sicherlich die letztere Ungleichung, aber $f(y) \le x - 1$ hat größeren Abstand von $f(x) = x$ als $\frac{1}{2}$. Also ist f für jedes $x \in \mathbb{Z}$ unstetig. Ist $x \ne \mathbb{Z}$ und $\delta = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$ der Abstand zur nächsten ganzen Zahl, so ist $f(y) = f(x)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$, für jedes $\varepsilon > 0$ ist also mit diesem δ die Forderung aus der Definition der Stetigkeit erfüllt.

l) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

Lösung: Für $x, y > 0$ ist nach der dritten binomischen Formel

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x\,, \text{ also ist } \quad \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{x}}\,.$$

Setzen wir daher für vorgegebenes $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x}$, so ist

$$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}} = \varepsilon\,.$$

m) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{x}$!

Lösung: Dies folgt sofort aus der in der vorigen Aufgabe bewiesenen Stetigkeit der Wurzelfunktion und dem entsprechenden Satz aus der Vorlesung.

n) *Richtig oder falsch:* Ist für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f.

Lösung: *Falsch:* Definieren wir etwa

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

so ist f in jedem Punkt unstetig, aber $g(x) = |f(x)| = 1$ ist eine konstante Funktion und somit überall stetig.