

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26–28. Oktober 2009

- a) Am ersten Januar 2010 werden 1000 Euro angelegt zu einem Zinssatz von 2%. Welches Kapital ist am Jahresende vorhanden, wenn nur einmal jährlich, einmal monatlich *bzw.* kontinuierlich verzinst wird?
- b) Konvergieren die Folgen $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$? Wenn ja, wohin?
- c) Der *binäre Logarithmus* $y = \text{lb } x$ einer positiven reellen Zahl x ist jene reelle Zahl, für die $2^y = x$ ist. Er spielt in der Informationstheorie eine große Rolle. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bits (= binary digits) zur Darstellung einer natürlichen Zahl n im Zweiersystem ist die kleinste natürliche Zahl r , die größer ist als $\text{lb } n$.
- d) $a, b > 1$ seien zwei reelle Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt eine reelle Zahl c , so daß

$$\log_b x = c \log_a x$$

für alle $x > 0$!

- e) Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, daß für jede *ganze* Zahl n und jede positive reelle Zahl x gilt: $\log(x^n) = n \log x$.
- f) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $x > 1$ ist $\log x \leq x - 1$!
- g) Zeigen Sie: Der Durchschnitt zweier offener Teilmengen eines metrischen Raums ist selbst offen.
- h) *Richtig oder falsch:* \mathbb{R} ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .
- i) *Richtig oder falsch:* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .
- j) *Richtig oder falsch:* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} .
- k) Die GAUSS-Klammer $[x]$ einer reellen Zahl x bezeichnet die größte ganze Zahl $z \leq x$. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = [x]$ stetig, an welchen nicht?
- l) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f: \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

ist stetig!

- m) Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen x_n gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $(\sqrt{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen \sqrt{x} !
- n) *Richtig oder falsch:* Ist für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = |f(x)|$ stetig, so auch f .