

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 19–21. Oktober 2009

- a) Welche der folgenden Teilmenge von \mathbb{R} sind nach oben, welche nach unten beschränkt? Bestimmen Sie, sofern es existiert, auch Infimum und Supremum der Menge!

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \quad B = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, \\ D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\}, \quad E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 5\}, \quad F = (0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 5), \quad G = \mathbb{N}_0$$

- b) Die quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe zwei reelle Lösungen. Zeigen Sie: Diese Lösungen sind das Infimum und das Supremum der Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q < 0\}!$$

- c) Sind sie auch Infimum und Supremum der Menge $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + px + q \geq 0\}$?
- d) Was passiert, wenn die Gleichung nur eine reelle Lösung hat?
- e) *Richtig oder falsch:* Konvergiert die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen x .
- f) *Richtig oder falsch:* Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die drei Teilfolgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n = x_{2n}$, $v_n = x_{2n+1}$ und $w_n = x_{3n}$ konvergent sind.
- g) *Richtig oder falsch:* Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- h) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^{n+1}/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!
- i) Finden Sie in der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = (-2)^n + (-1)^n/2n$ eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge!
- j) *Richtig oder falsch:* Jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.
- k) *Richtig oder falsch:* Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.
- l) *Richtig oder falsch:* Ist $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, so auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- m) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!
- n) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Zeigen Sie: Das ist eine CAUCHY-Folge!
- o) Zeigen Sie: Zu jeder irrationalen Zahl $x \in (0, 1)$ gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß x Grenzwert der rekursiv durch $x_1 = 2^{-v_1}$ und $x_n = x_{n-1} + 2^{-v_n}$ definierten Folge ist!