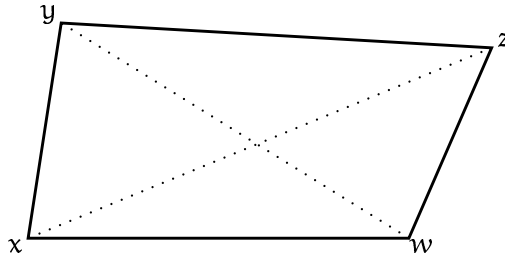


Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12–14. Oktober 2009

- a) Zeigen Sie, daß in jedem metrischen Raum die folgende *Vierecksungleichung* gilt: Für vier Elemente $x, y, z, w \in X$ ist stets: $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$

Lösung:



Nach der verschärften Dreiecksungleichung ist

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \quad \text{und} \quad |d(y, z) - d(z, w)| \leq d(y, w).$$

Wie wir bereits wissen, ist der Betrag einer Summe kleiner oder gleich der Summe der Beträge; daher ist

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(z, w)| &= |(d(x, y) - d(y, z)) + (d(y, z) - d(z, w))| \\ &\leq |d(x, y) - d(y, z)| + |d(y, z) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w), \end{aligned}$$

wie behauptet.

- b) Was besagt diese Ungleichung für die Standardmetrik auf \mathbb{R} ?

Lösung: Für vier reelle Zahlen x, y, z, w ist $||x - y| - |z - w|| \leq |x - z| + |y - w|$.

- c) Die Folge $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ rekursiv definiert durch

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_{n-1} - y_{n-1}), \frac{\sqrt{2}}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}) \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie die ersten Folgenglieder, stellen Sie eine Vermutung über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der Folge auf und beweisen Sie diese!

Lösung:

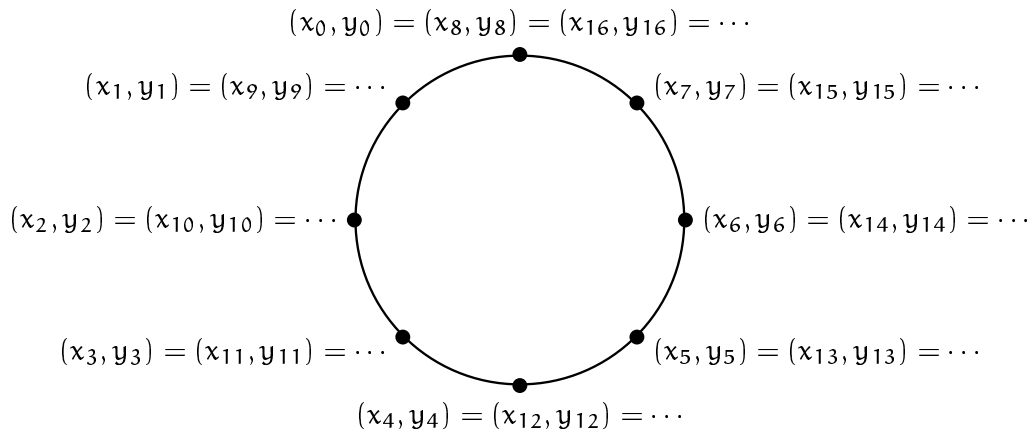
$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(0 - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(0 + 1) \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ (x_2, y_2) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = (-1, 0) \\ (x_3, y_3) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - 0), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + 0) \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ (x_4, y_4) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = (0, -1) = (-x_0, -y_0). \end{aligned}$$

Ersetzt man in der Rekursionsformel für die Folge x_{n-1} und y_{n-1} durch ihre negativen Werte, so ändert sich auch das Vorzeichen von x_n und y_n ; daher ist

$$(x_5, y_5) = (-x_1, -y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad (x_6, y_6) = (-x_2, -y_2) = (1, 0)$$

$$(x_7, y_7) = (-x_3, -y_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad (x_8, y_8) = (-x_4, -y_4) = (0, 1) = (x_0, y_0).$$

Ab hier wiederholt sich dann alles; die Folge ist periodisch mit Periode acht, d.h. für alle n ist $(x_{n+8}, y_{n+8}) = (x_n, y_n)$.



Das spricht sehr gegen Konvergenz; wir vermuten also, daß die Folge unbestimmt divergiert. Diese Vermutung läßt sich leicht beweisen: Würde die Folge nämlich gegen einen Punkt (x, y) konvergieren, so gäbe es insbesondere für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ der Abstand zwischen (x_n, y_n) und (x, y) kleiner wäre als ε . Unter diesen Punkten kommen sowohl welche vor mit $(x_n, y_n) = (1, 0)$, als auch welche mit $(x_n, y_n) = (-1, 0)$. Damit wäre nach der Dreiecksungleichung

$$2 = d((1, 0), (-1, 0)) \leq d((1, 0), (x, y)) + d((x, y), (-1, 0)) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

was absurd ist. Also ist die Folge nicht konvergent.

- d) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n \leq z_n$. Zeigen Sie: Falls die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beide konvergent sind und denselben Grenzwert x haben, so ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x !

Lösung: Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|x - y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dies läßt sich auch umschreiben in die Ungleichungskette

$$x - \varepsilon < y_n < x + \varepsilon.$$

Da die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beide gegen x konvergieren, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ sowie ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - z_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$. Für $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ gelten beide Ungleichungen; wenn wir sie wie oben umschreiben, haben wir also die Ungleichungskette

$$x - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < x + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

- e) Gilt auch die folgende Verallgemeinerung: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien drei Folgen reeller Zahlen derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n \leq z_n$. Außerdem seien die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beide konvergent. Dann ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Lösung: Wenn die beiden Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben, spricht offenbar nichts dagegen, daß sich die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Bereich zwischen diesen Grenzwerten hin- und herbewegt ohne gegen einen Punkt zu bieten; die Behauptung sollte

also falsch sein. Dies können wir am einfachsten dadurch zeigen, daß wir ein Gegenbeispiel konstruieren: Sei etwa

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad y_n = \begin{cases} 1 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases} \quad \text{und} \quad z_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Offensichtlich ist $x_n < y_n < z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge der x_n konvergiert gegen eins und die der y_n gegen zwei, aber die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbestimmt divergent.

- f) Entscheiden Sie für jede der hier definierten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und so weiter, ob sie konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent ist! Was können Sie im konvergenten Fall über den Grenzwert sagen?

$$x_n = \sqrt{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n+1}, \quad z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad v_n = (-1)^n(2n+1)$$

Lösung: Die Folge mit $x_n = \sqrt{n}$ wächst offensichtlich unbegrenzt und divergiert daher bestimmt gegen ∞ . Um das exakt zu beweisen, wählen wir eine reelle Zahl M und müssen zeigen, daß es dazu ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\sqrt{n} > M$ ist für alle $n \geq n_0$. Definieren wir n_0 als die kleinste natürliche Zahl größer M^2 , gilt diese Ungleichung für alle $n \geq n_0$.

y_n können wir umschreiben als

$$y_n = \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)-2}{n-1} = 1 - \frac{2}{n-1}.$$

Da die Folge der Zahlen $1/n$ eine Nullfolge ist, gilt dasselbe auch für die um eins verschobene Folge mit Gliedern $1/(n+1)$ sowie deren Doppeltes $(2/(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$; subtrahieren wir diese Folge von der konstanten Folge aus lauter Einsen, erhalten wir die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die somit gegen eins konvergiert.

Auch bei der Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die Situation klarer durch Umschreiben:

$$z_n = \frac{3(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{3(n+1)+3}{(n+1)^2} = \frac{3}{n+1} + \frac{3}{(n+1)^2}.$$

Die Folge ist also die Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

$u_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 2 & \text{für gerade } n \end{cases}$ definiert keine konvergente Folge: Würde sie

nämlich gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, gäbe es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - u_n|$ für alle $n \geq n_0$ kleiner wäre als ε . Unter den $n \geq n_0$ gibt es aber sowohl gerade als auch ungerade, also wäre

$$|x| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |x-2| < \frac{1}{2} \quad \text{d.h.} \quad \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

Diese beiden Ungleichungen kann aber keine reelle Zahl gleichzeitig erfüllen. Somit ist die Folge nicht konvergent, und da sie nur die Werte 0 und 2 annimmt, kann sie auch nicht bestimmt divergent sein. Also ist sie unbestimmt divergent.

Auch die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbestimmt divergent: Sie kann nicht gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, weil sonst z.B. ein n_0 geben müßte, so daß im offenen Intervall $(x-1, x+1)$ alle Zahlen der Form $(-1)^n(2n+1)$ mit $n \geq n_0$ liegen müßten, und sie ist auch nicht bestimmt divergent gegen ∞ oder $-\infty$, da es auch nur für beliebig große Indizes sowohl positive als auch negative Folgenglieder gibt.

- g) Welche der hier definierten komplexen Zahlenfolgen ist konvergent, und wohin konvergiert sie gegebenenfalls?

$$x_n = \frac{1-i}{n} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \quad y_n = 1 + i^n, \quad z_n = \left(\frac{3-i}{2+i}\right)^n$$

Lösung: x_n ist aus zwei Termen zusammengesetzt, die wir am besten zunächst getrennt betrachten. Der erste Summand $(1-i)/n$ definiert offensichtlich eine Nullfolge, denn das

ist ja einfach unser Standardbeispiel $1/n$ multipliziert mit der Konstanten $1 - i$. Für den zweiten Term berechnen wir zunächst den Betrag der Basis:

$$\left| \frac{1}{1+i} \right| = \sqrt{\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1-i}} = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1.$$

Somit ist die Folge der Potenzen von $1/(1+i)$ eine Nullfolge, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Summe zweier Nullfolgen und damit selbst eine Nullfolge.

Da i^n abwechselnd die Werte $i, -1, -i$ und 1 annimmt, ist auch die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ periodisch mit Periode vier; sie nimmt nacheinander jeweils die Werte $1+i, 0, 1-i$ und 2 an. Daß sie unbestimmt divergent ist, folgt genauso wie im Falle der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der vorigen Aufgabe.

Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schließlich ist eine Folge von Potenzen einer festen Zahl; wir müssen also deren Betrag berechnen:

$$\left| \frac{3-i}{2+i} \right| = \sqrt{\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{3+i}{2-i}} = \sqrt{\frac{9+1}{4+1}} = \sqrt{2} > 1.$$

Damit divergiert die Folge.

- h) Welche der Folgen aus den beiden vorigen Aufgaben sind beschränkt? Welche der reellen Folgen sind monoton wachsend, welche monoton fallend?

Lösung: Beginnen wir mit den reellen Folgen! Wie wir gesehen haben divergiert die Folge $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ∞ , ist also nicht beschränkt. Sie ist allerdings (sogar streng) monoton wachsend, denn ist $n > m$, so ist auch $\sqrt{n} > \sqrt{m}$.

y_n hatten wir geschrieben als $1 - 1/(n+2)$; auch diese Folge ist streng monoton wachsend, denn ist $n > m$, so ist $1/(n+2) < 1/(m+2)$, also $1 - 1/(n+2) > 1 - 1/(m+2)$. Somit ist $y_1 = \frac{2}{3}$ eine untere Schranke und der Grenzwert eins eine obere.

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die Summe zweier monoton fallender Nullfolgen, also selbst monoton fallend. Die Folge ist auch beschränkt mit $z_1 = \frac{2}{4}$ als oberer und der Null als unterer Schranke.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pendelt ständig zwischen 0 und 2 hin- und her; damit ist 0 eine untere und 2 eine obere Schranke. Monotonie haben wir hier natürlich keine.

Auch die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie ja ständig zwischen positiven und negativen Zahlen hin- und herspringt; sie ist auch offensichtlich nicht beschränkt.

Bei den komplexen Folgen ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Nullfolge natürlich beschränkt; da $|1-i| = \sqrt{2} < 2$ und $|1/(1-i)| < 1$ ist, wäre um Beispiel drei eine Schranke für den Betrag. y_n kann nur vier Werte annehmen, also ist die Folge beschränkt mit z.B. der Zwei als Schranke. Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schließlich ist unbeschränkt.

- i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit Grenzwert x . Zeigen Sie, daß dann die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n = \sqrt{x_n}$ gegen \sqrt{x} konvergiert!

Lösung: Wir betrachten zunächst den Fall $x = 0$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x_n| < \varepsilon^2$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist auch $|y_n| = |\sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also konvergiert auch die Folge der Wurzeln gegen Null.

Um die beiden Folgen auch für $x > 0$ miteinander in Zusammenhang zu bringen, verwenden wir – wie so oft bei Wurzeln – die dritte binomische Formel:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x_n})(\sqrt{x} + \sqrt{x_n}) = x - x_n.$$

Damit ist

$$|\sqrt{x} - y_n| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_n}| = \frac{|x - x_n|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_n}|} \leq \frac{|x - x_n|}{\sqrt{x}}.$$

Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ verwenden wir nun zunächst die vorausgesetzte Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; danach gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x - x_n| < \sqrt{x} \cdot \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist nach obiger Formel für diese n auch $|\sqrt{x} - y_n| < \varepsilon$.

j) Zeigen Sie: Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch die reellen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$! Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ?$$

Lösung: Das sollte eigentlich so sein, also versuchen wir, es zu beweisen. Der Grenzwert der Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei $z = x + iy$; es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da $(x - x_n)^2$ und $(y - y_n)^2$ beide größer oder gleich null sind, folgt dann auch

$$|x - x_n| = \sqrt{(x - x_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \quad \text{und}$$

$$|y - y_n| = \sqrt{(y - y_n)^2} \leq \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert die Folge der Realteile gegen den Realteil von z und die der Imaginärteile gegen den Imaginärteil.